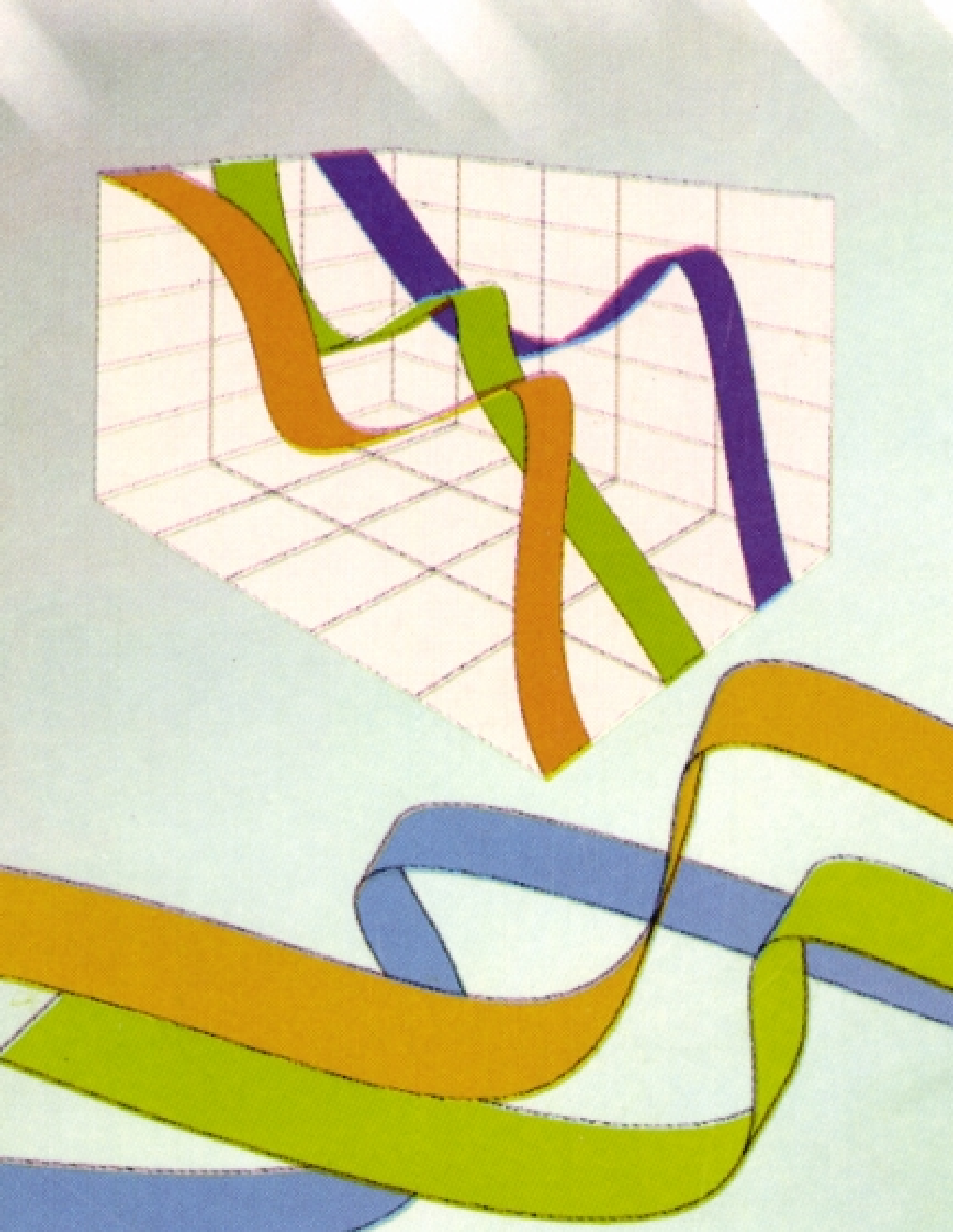
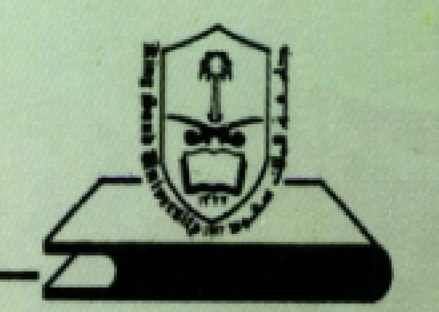
تقنيات الأمثلية في البرمجة غير الخطية



تأليف

الدكتور أحمد علي أحمد رضوان

الدكتور عبد الرحمن محمد سليمان أبو عمة



جامعة الملك سعود

النشر العلمي و المطابع




بسم الله الرحمن الرحيم



تقنيات الأمثلية

في

البرمجة غير الخطية

تأليف

الدكتور أحمد على أحمد رضوان الدكتور عبدالرحمن محمد سليمان أبو عمة

قسم الإحصاء وبحوث العمليات - كلية العلوم - جامعة الملك سعود



النشـر العلمي والمطابع - جـامعـة الملك سـعـود

ص.ب ٦٨٩٥٣- الرياض ١١٥٣٧ - المملكة العربية السعودية

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر
رضوان، أحمد علي أحمد
تقنيات الأمثلية في البرمجة الخطية / أحمد علي رضوان. -الرياض.
٣٢٥ ص ؛ ١٧ × ٢٤سم
ردمك: ٤-٩١٥-٠٥-٩٩٦٠
١-البرمجة الخطية ٢-الإحصاء الرياضي أ-أبو عمة، عبدالرحمن محمد سليمان (م. مشارك) ب-العنوان
ديوي ٥١٩,٧٦ ١٩/٣٩٥٨

رقم الإيداع ١٩/٣٩٥٨
ردمك: ٤-٩١٥-٠٥-٩٩٦٠

حكمت هذا الكتاب لجنة متخصصة شكلها المجلس العلمي بالجامعة، وقد وافق المجلس العلمي على نشره في اجتماعه الثامن عشر للعام الدراسي ١٤١٦/١٤١٧هـ المعقود بتاريخ ١٤١٧/١/٣٠هـ الموافق ١٩٩٦/٦/١٦م.



النشر العلمي والمطابع ١٤٢٢هـ

استهلال

لا تزال الكتب العربية في كثير من فروع العلوم البحتة والتطبيقية محدودة جداً، ولا يتجاوز غالبيتها الموضوعات الأساسية للعلم ومقدماته ومبادئه الأولية . ينطبق هذا القول على العلوم الرياضية كافة، وعلى علم بحوث العمليات على وجه الخصوص.

في هذا الكتاب حاولنا عرض موضوعات في بحوث العمليات تدور في فلك تقنيات الأمثلية وذلك لسد فراغ كبير يشعر به غالبية الدارسين العرب للبرمجة الرياضية وتقنيات الأمثلية في الجامعات .

حاولنا تبسيط عرضنا لموضوعات متقدمة وذلك باستخدام الأمثلية، وتيسير أساليب الحل ووضعها في خطوات تسهل متابعتها وربط الأجزاء النظرية بالاستخدامات التطبيقية، وإيراد مجموعة من التمارين في نهاية كل فصل تساعد الدارس على استيعاب المفاهيم الرياضية والخطوات العملية بصورة أعمق، وتفتح أمامه مجالاً أرحب للتطبيق وتدريب متوازن يوضح أهمية تقنيات الأمثلية في مجالات الحياة المختلفة.

نفترض في الكتاب خلفية جيدة في حساب التفاضل والتكامل ومبادئ الجبر الخطي لا تتجاوز في تقديرنا مقرر على مستوى الجامعة في كل منهما .

يتكون الكتاب من سبعة فصول وملحق نتعرض فيها لموضوعات في البرمجة الخطية وغير الخطية بمتغير واحد أو متعددة المتغيرات وبقيود متراجحة أو متساوية أو بدون قيود، كما نعرض في الفصل الأخير البرمجة التربيعية . تطرقنا كذلك لاستخدام أكثر من طريقة في بعض الأحيان - لحل مسألة الأمثلية لتوفير البدائل أحياناً ولمناسبة طريقة عن غيرها في أحيان أخرى ، وقد تعرضنا لميزات بعض هذه الطرق وتميزها عن غيرها حسب نوع المسألة المدروسة .

لا يخلو الكتاب من بعض النقص الذي سندركه عند تكرار تدريسه ، ولا يكتمل الكتاب بدون ترحيب المؤلفيْن بتساؤلات الدارسين ونقد الزملاء العارفين.

نأمل أن نكون بهذا الكتاب قد أضفنا إلى صرح التعليم بالعربية على المستوى الجامعي لبنة يكون لنا فيها أجر المجتهدين . . والله الموفق وهو الهادي إلى سواء السبيل .

المؤلفان

المحتويات

استهلال	(هـ)
الفصل الأول : مقدمة عامة	١
(١ , ١) مقدمة	١
(١ , ٢) البرمجة الخطية	٨
(١ , ٣) البرمجة غير الخطية	١٠
(١ , ٤) صياغة مسائل برمجة خطية	١٤
(١ , ٥) صياغة مسائل برمجة غير خطية	٢٠
(١ , ٦) تمارين	٢٣
الفصل الثاني : البرمجة الخطية	٢٥
(٢ , ١) مقدمة	٢٥
(٢ , ٢) الطريقة البيانية ومبدأ الثنائية	٣١
(٢ , ٣) طريقة السمبلكس	٣٨
(٢ , ٤) تمارين	٥٩

الفصل الثالث : البرمجة غير الخطية ذات المتغير الواحد ٦٥
(٣,١) مقدمة ٦٥
(٣,٢) البحث الخطي بدون استخدام المشتقات ٦٦
(٣,٣) البحث الخطي باستخدام مشتقات ٧٧
(٣,٤) تمارين ٨٤
الفصل الرابع : البرمجة غير الخطية وغير المقيدة ٨٥
(٤,١) مقدمة ٨٥
(٤,٢) الطريقة التقليدية ٨٦
(٤,٣) الطريقة التكرارية ٩٧
(٤,٤) تمارين ١٢٨
الفصل الخامس : المسائل المقيدة بمعادلات ١٣٣
(٥,١) مقدمة ١٣٣
(٥,٢) طريقة التعويض المباشر ١٣٤
(٥,٣) طريقة تغيير القيود ١٤٤
(٥,٤) طريقة مضاريب لاجرانج ١٦٥
(٥,٥) تمارين ١٨٢
الفصل السادس : البرمجة غير الخطية متعددة المتغيرات وبقيود متراجحة
(٦,١) مقدمة ١٨٥
(٦,٢) الطريقة التقليدية بشروط كون- توكر ومضاريب لاجرانج ١٨٧
(٦,٣) الطرق المباشرة ٢١٠
(٦,٤) الطرق غير المباشرة ٢٣٧
(٦,٥) تمارين ٢٦١

الفصل السابع : البرمجة التربيعية

(٧,١) مقدمة ٢٦٥

(٧,٢) طريقة وولف ٢٦٧

(٧,٣) طريقة بيل ٢٨٤

(٧,٤) تمارين ٢٩٤

الفصل الثامن: الملاحق ٢٩٩

(٨,١) مقدمة ٢٩٩

(٨,٢) التفاضل الكلي الرائي ٣٠٠

(٨,٣) مفكوك متسلسلة تايلور لدالة متعددة المتغيرات ٣٠٠

(٨,٤) مصفوفات هس والمصفوفات المتماثلة والمؤكدة الإيجاب المؤكدة السلبية ونصف المؤكدة ٣٠١

(٨,٥) المجموعات الحدية ٣٠٢

(٨,٦) الدالة المحدبة والدالة المقعرة ٣٠٣

(٨,٧) النهايات العظمى الكلية والموضعية ٣٠٥

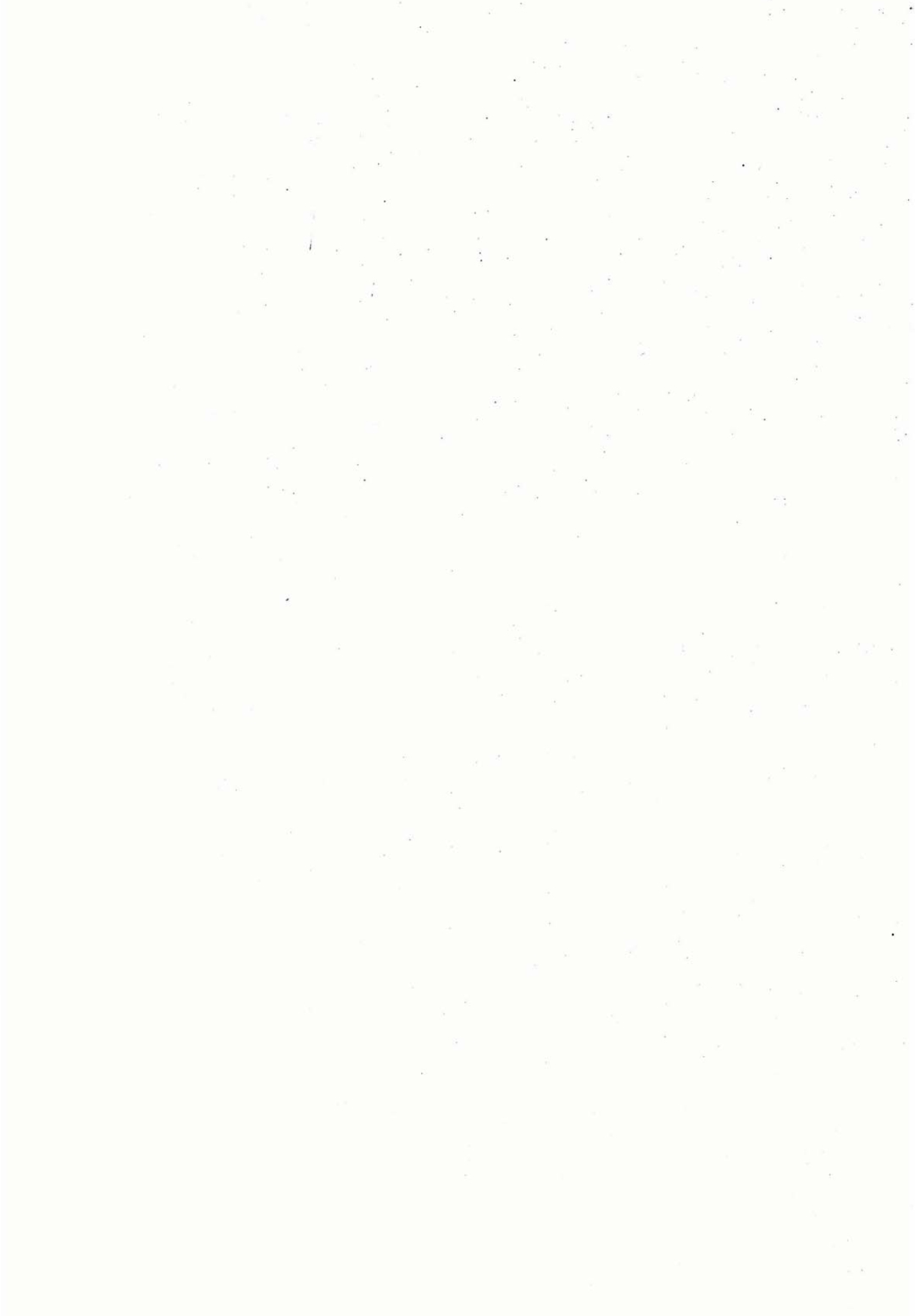
المراجع ٣٠٧

ثبت المصطلحات ٣١١

أولا: عربي - إنجليري ٣١١

ثانيا: إنجليري - عربي ٣١٨

كشاف الموضوعات ٣٢٥



الفصل الأول

مقدمة عامة

• مقدمة • البرمجة الخطية • البرمجة غير الخطية • صياغة مسائل برمجة خطية • صياغة مسائل برمجة غير خطية • تمارين

(١,١) مقدمة

البرمجة غير الخطية أحد فروع علم بحوث العمليات (Operations Research) الذي يعتبر من العلوم الحديثة نسبياً مقارنة بكثير من العلوم التي تدرس في الجامعات، وتقوم أقسام متخصصة بتدريسها. ومع أن بداية نشأة علم بحوث العمليات ترجع إلى عدة عقود ماضية، إلا أن كثيراً من الجامعات لم تنشئ أقساماً خاصة ببحوث العمليات، ولكن لم تستطع غالبية الجامعات إلا أن تُدخل موضوعات متعددة لبحوث العمليات في مناهجها. قدمت بعض الجامعات هذه الموضوعات في أقسام الرياضيات، أو الإحصاء أو الأساليب الكمية أو الإدارة الصناعية، أو الهندسة الصناعية.

من أهم مقررات بحوث العمليات التي لقيت اهتماماً كبيراً في مناهج الجامعات، وبالتالي أصبح فيها المتخصصون والباحثون، نذكر منها على سبيل المثال:

١- البرمجة الرياضية (Mathematical programming) ومن أدواتها:

أ- البرمجة الخطية (Linear programming).

ب- البرمجة غير الخطية(Non-linear programming).

جـ- البرمجة الديناميكية .(Dynamic programming)

د- البرمجة العددية .(Integer programming)

كما تشمل بحوث العمليات الموضوعات التالية:

٢- المحاكاة (Simulation).

٣- جدولة المشاريع (Project scheduling)،

٤- نظرية الألعاب(Theory of games)،

٥- نظرية صفوف الانتظار (Queuing theory)،

٦- نظرية الموثوقية(Reliability theory)،

٧- التنبؤ (Forecasting)،

٨- نظرية القرارات (Decision theory)،

٩- تحليل الشبكات (Network analysis)،

١٠- نماذج التخزين (Inventory models)؛

لقد حاول كثير من المشتغلين بعلم بحوث العمليات إعطاء تعاريف لهذا العلم، ولعل أكثر هذه التعاريف شمولاً تعريف جمعية بحوث العمليات الأمريكية (Operations Research Society of America) الذي ينص على أن بحوث العمليات هو علم تطبيقي وتجريبي يهتم بملاحظة أنظمة إنسانية آلية محددة وفهمها وتقديرها، والمشتغل ببحوث العمليات هو من يكرس هذه المعرفة في المسائل والمشكلات التطبيقية سواء الأعمال الخاصة أو الحكومية الرسمية أو المجتمع».

قدم توماس ساتي (Thomas L. Saaty) تعريفا ساخرا نوعا ما ولكنه

يحتوي على التعامل الواقعي مع المشكلات العملية حيث يقول بأن « بحوث العمليات هو الفن الذي يقدم حلولاً سيئة لمسائل كانت الحلول الممكنة لها، بدون هذا الفن، أسوأ ».

يتضح من موضوعات بحوث العمليات أن نشأة العلم قديمة جداً، أو ربما تعود إلى القرن الثامن عشر، وذلك عند محاولة بعض العلماء أمثال تايلور (F. W. Taylor) صياغة بعض المسائل والمشكلات العملية في نماذج رياضية. ربما يعود علم بحوث العمليات في نشأته إلى محاولة العالم الرياضي الدانماركي إيرلنج (A. K. Erlang) عندما نشر أبحاثه بشأن دراسة المرور والازدحام في خطوط الهاتف.

أول تشكيل لفرقة بحوث عمليات كان خلال الحرب العالمية الثانية، فقد كوّن البريطانيون فريقاً لدراسة استراتيجيات وخطط الدفاع الجوي والأرضي. وكان هذا الفريق لبحوث العمليات يتكون من علماء في الفيزياء، والرياضيات، وعلم النفس، والهندسة. بعد انتهاء الحرب العالمية الثانية، و عندما تحول اهتمام كثير من الدول إلى تطوير صناعاتها أدى ذلك إلى نمو مضطرد في المصانع الصغيرة، و المحلات التجارية المحدودة لتصبح بعد عدة سنوات شركات صناعية، و تجارية متعددة الفروع والاهتمامات تصنع وتسوق عشرات أو مئات السلع، ويعمل فيها مئات أو آلاف العمال والمهندسين والمهنيين مما استلزم إدخال الأسلوب العلمي في الإدارة. انخرط بعد ذلك الكثير من المشتغلين ببحوث العمليات، أيام الحرب العالمية الثانية، إلى تطبيق أساليب بحوث العمليات وتقنياته في إدارة المصانع والشركات التجارية والتخطيط لها لرفع كفاءتها وتطوير خدماتها ودعم قدرتها على منافسة مثيلاتها داخل بلدانها وفي أقطار العالم الأخرى.

(١,١,١) أسلوب بحوث العمليات

يتبع المشتغلون ببحوث العمليات خطوات محددة يكاد يجمع غالبيتهم عليها

عند معالجة مشكلة عملية وهي كما يلي :

(أ) تحديد المسألة : والهدف من ذلك وضع إطار عام يحدد أبعاد المشكلة المراد دراستها وتحديد المتغيرات المؤثرة فيها والمتأثرة بها ، وجمع المعلومات المتوافرة عنها آنياً أو تاريخياً . كما يتحدد في هذه المرحلة طبيعة المشكلة والإمكانيات المتيسرة في إطارها ، وكذلك الهدف من حلها .

(ب) صياغة المسألة : وهي مرحلة تحويل المسألة إلى مجموعة من المتغيرات والدوال الرياضية ، فيتحدد في هذه المرحلة ، متغيرات القرار ودالة أو دوال الهدف ، والشروط اللازمة من حيث الإمكانيات على متغيرات القرار .

(جـ) بناء النموذج الرياضي : وهو التعبير عن المشكلة بمجموعة من المعادلات والدوال الجبرية ، وتحديد المتغيرات الأساسية للقرار ، والمتغيرات المرنةأو الشكلية التي يمكن التحكم فيها ، والمتغيرات غير المرنة التي لا يمكن تغييرها ، وفي هذه المرحلة تتضح معالم المشكلة وتبرز العلاقة بين متغيراتها ، وتصبح معدة للحل .

(د) اشتقاق الحل : يقوم المشتغل ببحوث العمليات بالبحث عن الطرق الرياضية الممكنة لحل النموذج الممثل للمشكلة ، فقد يستخدم التحليل الرياضي للوصول إلى الحل الأمثل بسهولة ويسر ، كما قد لا توجد معالجة تحليلية جيدة أو مناسبة مما يجعلنا نلجأ إلى الطرق العددية التقريبية نوعاً ما أو نلجأ إلى التقريب والمحاكاة بنموذج آخر .

(هـ) فحص النموذج والحل : لابد من التأكد من أن الحل الذي تم الحصول عليه يحقق النموذج بصورة جيدة . وعند توافر أكثر من حل يمكن مقارنتها

على النموذج وتسمية هذه العملية «تحليل الحساسية». بعد ذلك يمكن وضع قيود أخرى على بعض المتغيرات وإعادة حلها مرة أخرى.

(و) تطبيق الحل على المسألة العملية: وتأتي هذه المرحلة في آخر دراسة بحوث العمليات وهي تطبيق الحلول بعد أن تأكد لنا سلامتها وتعرفنا على سلبياتها وتفاعلها مع الإمكانيات المتاحة بشأن مدى استخدامها لهذه الإمكانيات.

(٢,١,١) كتب بحوث العمليات

تعتبر الكتابة تحت عنوان بحوث العمليات في الكتب حديثة نسبياً، فأهم الكتب التي تعالج موضوعات لبحوث العمليات معالجة منتظمة وأسلوب علمي محدد، لم تظهر إلا بعد عام ١٩٥٠م كما ستلاحظ من فهرس المراجع لهذا الكتاب.

تعتبر مؤلفات ساتي (Saaty) (١٩٥٩م)، وساسيني (Sasseni)، وياسبان (Yaspan) وفريدمان (Friedman) (١٩٥٩م) من أوائل الكتب التي نشرت في بحوث العمليات بعد الحرب العالمية الثانية. كما أنه يمكن اعتبار كتاب حمدي طه (Taha) (١٩٩٣م)والذي ظهر في طبعته الأولى عام ١٩٧٦م، وكتاب أكوف (Ackoff) وساسيني (Sasieni) (١٩٦٨م) من الكتب المهمة في هذا الصدد، كما يُعتبر كتاب هيلر (Hillier) وليبرمان(Lieberman)(١٩٩٠م) والذي ظهر في طبعته الأولى عام ١٩٧٦م من أشمل الكتب وأوسعها معالجة لموضوع بحوث العمليات. يعتبر كتاب جاس (Gass) (١٩٩٥م) من أحدث الكتب في البرمجة الخطية، أما في البرمجة الرياضية فلعل كتب وينستون (Winston) (١٩٩١م) ومينوكس (Minoux)(١٩٩٥م) وهيلروليبرمان (١٩٩١م) من أشهر الكتب في هذا السياق وأحدثها. يمكن الإشارة كذلك إلى كتابي ماكورميك (Macormic) (١٩٨٣م) وهورست (Horst) وتوي (Tuy) (١٩٩٠م) في البرمجة غير الخطية

والأمثلية على الترتيب. كما يمكن اعتبار مؤلفات أفريل (Avriel) (١٩٧٦م) وفلتشر (Fletcher) (١٩٨٧م) وبازرعة (Bazaraa) وجارفيس (Jarvis) (١٩٩٠م) وشيرالي (Sherali) (١٩٩٠م) من المراجع الرئيسة في موضوع البرمجة غير الخطية والأمثلية بشكل عام. كانت غالبية هذه الكتب باللغة الإنجليزية أما باللغة العربية فلا يوجد سوى عدد محدود من الكتب، على حد علمنا، لبحوث العمليات ولكننا نذكر على سبيل المثال لويز سيفين (١٩٧٧، ١٩٨٥أ، ١٩٨٥ب) في بحوث العمليات والنماذج الخطية والنماذج اللاخطية وأبو ركبة (١٩٨٣م) تطبيق بحوث العمليات في الإدارة، وأبو عمه والعش (١٩٩٠م) البرمجة الخطية كمراجع أولية لموضوعات في بحوث العمليات. ومن الكتب العربيةفي بحوث العمليات نشير الى العتيبي (١٤١٣هـ) بحوث العمليات وتطبيقاتها في القوات المسلحة، و هيكل (١٩٨٧م) الكمبيوتر وبحوث العمليات.

(٣,١,١) نبذة تاريخية عن تطور بحوث العمليات

يمكن إرجاع تاريخ بداية طرق بحوث العمليات أو الأمثلية - بصفة عامة - إلى أيام نيوتن (Newton)، ولاجرانج (Lagrange)، وكوشي (Cauchy)؛ فمثلاً يعود الفضل لمساهمات نيوتن وليبنيتز (Leibnitz) في تطوير الطرق التفاضلية في حل مسائل الأمثلية. أما أسس حساب المتغيرات (calculas of variations) فيعود فضل إرسائها لكل من بيرنوللي (Bernoulli)، وأويلر (Euler)، ولاجرانج (Lagrange)، وڤايرستراس (Weiresttrass). كما عرفت طريقة حل مسائل الأمثلية المتعددة باستحداث معالم غير معروفة مسبقاً باسم مخترعها لاجرانج، أما أول تطبيق بطريقة أشد انحدار لحل مسائل البرمجة غير المقيدة فترجع في أصلها إلى كوشي. منذ ذلك الحين وحتى منتصف القرن العشرين لم يقدم الباحثون طرقاً جديدة ذات بال ويمكن القول أن الإضافات والأبحاث تعتبر محدودة. ومنذ اختراع

الحاسبات الآلية الرقمية السريعة (Digital Computers) تنافس الباحثون في استخدامها لدراسة الطرق السابقة وأمكن التمعن في مدلولاتها، وبالتالي استيعابها، وتطوير أساليبها. كما اهتم بعض الباحثين في زيادة مجال التطبيقات التي تستخدم فيها طرق بحوث العمليات وفي معالجة مسائل كبيرة جداً وذات متغيرات كثيرة ربما يستحيل معالجتها بالطرق اليدوية المعتادة

سنورد فيما يلي أهم المساهمات التي أدت إلى تكوين علم بحوث العمليات والتي تعرضت لبعضها المراجع السابقة بشيء من التفصيل.

أهم تطوير في مجال الطرق العددية لحل مسائل البرمجة غير المقيدة كان في بريطانيا، وبالتحديد في الستينات من القرن العشرين. علماً أن نموذج فون نيومان (Von Neuman) الخطي للاقتصاد كان من أهم الأعمال التي عالجت مسائل البرمجة الخطية في عامي ١٩٣٥/ ١٩٣٦م، أما ليونتيف (Leontief) فقد درس نموذج الدخل والإنفاق في الاقتصاد الأمريكي، كما يمكن اعتبار تطبيق فريق بحوث العمليات برئاسة المارشال وود (Wood) لنموذج ليونتيف في مسائل توزيع الإمكانات في القوات الجوية الأمريكية من أكثر التطبيقات شمولاً فيما بعد في الأربعينات من القرن العشرين. طور بعد ذلك دانتزيج (Dantzig)، وهو عضو في فريق بحوث العمليات السابق، في عام ١٩٤٧م طريقة السمبلكس (Simplex Method) لحل مسائل البرمجة الخطية التي لايزال استخدامها واسعا وأساسيا في هذا المجال إلى وقتنا الحالي. كما قدم بيلمان (Bellman) طريقة إعلان قاعدة الأمثلية في عام ١٩٥٧م لمعالجة مسائل الأمثلية المقيدة. وتعتبر شروط كون وتُكر (Kuhn and Tucker) اللازمة والكافية للأمثلية في مسائل البرمجة من الأسس التي قام عليها البحث في مسائل البرمجة غير الخطية. من المساهمات المتميزة لحل مسائل البرمجة الخطية في الستينات نذكر أعمال زوتيندك (Zoutendijk)، وروزن (Rosen)، كما أن أعمال كارول (Carrol)، وفياكو (Fiacco)، ومكورميك (McCormick) قد

ساعدت في وضع صياغة مسائل معقدة، يمكن حلها بطرق برمجة غير مقيدة. أما البرمجة الهندسية، فيعود تطويرها إلى كل من دفين (Duffin)، وزينر (Zener)، وبيرسون في الستينات كذلك من القرن العشرين. وتعود البرمجة العددية في أساسها إلى أعمال جوموري (Gomory)، أما البرمجة العشوائية فلعل أهم مساهمات كانت لكل من دانتزيج، وشارنز (Charnes) وكوپر (Cooper) أما برمجة الأهداف (Goal Programming) فتعود في بدايتها إلى اقتراحها حل مسائل البرمجة الخطية من قبل شارنز وكوپر عام ١٩٦١م.

في الواقع لا توجد طريقة شاملة كاملة لحل كافة مسائل البرمجة غير الخطية، ولكن هناك عدة طرق لكل طريقة قدرتها وميزات معالجتها لنوعية محددة من المسائل يكون أسلوبها في حلها الوحيد، أو الأيسر للوصول إلى الحل المطلوب، كما قد توجد أكثر من طريقة لحل مسألة ما، وفي هذه الحالة تكون المفاضلة في توفير الوقت ودرجة الدقة.

(١,٢) البرمجة الخطية

تعتبر البرمجة الخطية (linear programming) وتقنياتها مثالية في حل كثير من مسائل بحوث العمليات، ومن الأساسيات المهمة لتطوير حلول مسائل متعددة في موضوعات أخرى من بحوث العمليات، مثل: البرمجة العددية، والبرمجة العشوائية، والبرمجة غير الخطية. استطاعت أساليب البرمجة الخطية أن تنال اهتمام الكثير من الباحثين في مجالات علمية متعددة ومتباينة الأسس، لنجاحها في تطبيقاتها وحلولها ومعالجتها. من هذه المجالات الصناعة والزراعة والصحة، والاقتصاد، والدفاع، والتعليم، والنقل، وبعض العلوم الاجتماعية والإنسانية.

ويمكن تلخيص صياغة الحالة العامة لمسائل البرمجة الخطية على أنها إيجاد القيمة المثلى لدالة الهدف:

$$z = f(x_1 \ , \ \dots \ , \ x_n) \qquad (١,١)$$

وهي دالة في n متغير x_i و $(i = 1,2,...,n)$ تسمى متغيرات القرار (decision variables) وقد تكون القيمة المثلى أكبر أو أصغر قيمة يمكن أن تأخذها دالة الهدف تحت شروط أو قيود (constraints) من أهم صيغها أن تكون :

$$g_i(x_1 \ , \ \dots \ , \ x_n) \le b_i \quad , \quad i = 1 \ , \dots , \ m \qquad (١,٢)$$

$$x_1 \ , \ \dots \ , \ x_n \ge 0 \qquad (١,٣)$$

يلاحظ أنه يجب في مسائل البرمجة الخطية أن تكون الدالة $f(x_1 \ ,...., \ x_n)$ وكذا جميع الدوال $g_i(x_1 \ , \ \dots \ , \ x_n)$ ، $(i = 1 \ , \dots , \ m)$ خطية في كل من متغيرات القرار $x_1 \ ,...., \ x_n$. وأن تكون مجموعة الثوابت b_i حيث $(i = 1,...,n)$ ذات قيم حقيقية . تسمى مجموعة القيود $x_i \ge 0$ و $(i = 1,2,...,n)$ بشروط عدم السالبية (nonnegativity) .

من الواضح ، وفي الغالب ، في كثير من مسائل البرمجة الخطية ، أن تكون القيود على شكل متباينات (أو متراجحات) ، وقد تكون أحياناً معادلات ، كما أنها قد تكون خليطاً من المتباينات (في أحد الاتجاهين) والمعادلات . أما عدم السالبية ، التي تحدد قيما صفرية أو موجبة لمتغيرات القرار ، فإنها تلائم كثيراً من حالات وأوضاع مسائل الحياة العملية .

تأخذ دالة الهدف معاني مختلفة طبقاً للمسألة التي تمثلها ؛ فقد تعبر عن الربح ، أو كمية الإنتاج ، أو عدد الوحدات المنتجة في مصنع ، أو عدد المرضى الذين يستفيدون من علاج في مستشفى أوعدد الوحدات أو الأوزان المطلوب نقلها من مكان لآخر . وعندئذ تكون الأمثلية (optimization) لدالة الهدف هي تكبيرها (maximization) ضمن القيود أو الشروط المحددة . كما قد تعبر دالة الهدف عن مقدار الخسارة ، أو عدد الساعات الضائعة ، أو كمية المواد الخام المهدرة . . . إلخ وبالتالي الأمثلية هي تصغير (minimization) دالة الهدف إلى أقل قيمة ممكنة . يكون

المطلوب أو المتوقع إيجاد قيم متغيرات القرار التي عندها تتحق القيمة المثلى تكبيراً أو تصغيراً، وكذلك إيجاد قيمة دالة الهدف عند تلك القيم.

لقد تطور علم البرمجة الخطية تطورا كبيرا وطرق بأساليبه أبواب مجالات كثيرة في الخمسين عاماً الماضية. كما أن لتطور الحاسبات الآلية (computers) وبرمجتها، وزيادة سرعتها دورا كبيرا ساعد العاملين في البرمجة الخطية على التعامل مع مجالات إضافية أخرى، ومعالجة مسائل بمتغيرات كثيرة جداً تصعب معالجتها بالأساليب اليدوية في حل مسائل البرمجة الخطية.

وكما أشرنا في المقدمة، فإن طريقة السمبلكس (simplex) التي ابتدعها دانتزيج (Dantzig) في منتصف الأربعينات من القرن العشرين من أفضل الطرق لحل كثير من مسائل البرمجة الخطية بمختلف صياغاتها وتعدد تطبيقاتها.

(١,٣) البرمجة غير الخطية

يمكن تقسيم البرمجة غير الخطية (nonlinear programming) إلى قسمين رئيسيين هما البرمجة والأمثلية غير الخطية بمتغير (single variable) والبرمجة غير الخطية متعددة المتغيرات (multivariable). كما قد تتشعب طرق البرمجة متعددة المتغيرات إلى فرعين هما: نظرية البرمجة التقليدية (classical)، وخوارزميات (algorithms) البرمجة غير الخطية.

تمكن صياغة مسألة البرمجة غير الخطية أحادية البعد أو وحيدة المتغير على أنها تصغير أو تكبير للدالة:

$$z = f(x) \qquad (١,٤)$$

علما بأن $f(x)$ دالة قد لاتكون خطية، ويكون البحث عن قيمة x التي تجعل الدالة $f(x)$ مثلى أي التي تجعلها أكبر أو أصغر ما يمكن، ويكون مجال البحث في مجموعة الأعداد الحقيقية R ؛ أي $(-\infty, \infty)$. أما في حالة وضع قيد على متغير

القرار x فإن المسألة تكون من الصيغة تكبير دالة الهدف أو تصغيرها:

$$z = f(x) \quad (١,٥)$$

تحت القيد:

$$a \le x \le b \quad (١,٦)$$

وتسمى الأخيرة برمجة أحادية البعد مقيدة.

ومن طرق حل هذه النوعية من المسائل نذكر تقنيات البحث المتتابع، وبحث مجال الثلاث نقط وبحث فيبوناتشي(Fibonacci) ، وبحث متوسط الفترة الذهبية.

(١,٣,١) البرمجة التقليدية غير المقيدة للمسائل الحدية

ولا يحتوي هذا النوع من البرمجة للمسائل الحدية (external) على قيود أو شروط، ويكون المطلوب فيه غالباً إيجاد القيمة الكبرى أو الصغرى لدالة الهدف ولتكن:

$$z = f(\mathbf{x}) = f(x_1 \,, \,\dots \,, \, x_n) \quad (١,٧)$$

وحلها هو البحث عن النقطة $\mathbf{x}_0$ التي تحقق العلاقة:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) \le f(\mathbf{x}_0) \quad (١,٨)$$

وذلك في حالة التكبير مثلاً حيث أن $\mathbf{h} = (h_1 \,,\dots, \, h_n)$ وأن $|h_i|$ كمية حقيقية موجبة وصغيرة بما فيه الكفاية لكل قيم $i = 1, \dots , n$. نستخدم لحل مثل هذا النوع من المسائل عدة طرق منها الانحدار (Gradient) عن طريق مفكوك تايلور (Taylor's expansion) للدالة تحت الدراسة وتعيين مصفوفة هس (Hess)، ومحدداتها الجزئية، كما يمكن استخدام طريقة نيوتن – رافسون العددية© (Newton-Raphson).

أما في حالة المسائل المقيدة فإن صياغة المسألة قد أخذ شكل تكبير دالة الهدف:

$$z = f(\mathbf{x}) \quad (١,٩)$$

تحت شروط المساواة:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \qquad (١,١٠)$$

حيث إن $\mathbf{x}^T = (x_1 , \dots , x_n)$ ، $\mathbf{g} = (g_1 , \dots , g_m)^T$ ونفرض عادة أن كلا من $g_i(x), f(x)$ قابلة للاشتقاق ومشتقاتها مستمرة (continuously differentiable).

كما قد نستخدم طريقة مضاريب لاجرانج (Lagrange multipliers) لحل المسألة المعطاة بدالة الهدف (١,٩) والشروط (١,١٠) وذلك بتكوين دالة لاجرانج التالية:

$$L(\mathbf{x} , \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda\, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \qquad (١,١١)$$

تم إيجاد المشتقات الجزئية للدالة L ووضعها مساوية للصفر وذلك لنحصل على المعادلات:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \qquad (١,١٢)$$

التي تعطي الشروط الضرورية للحل. سنعطي الشروط الكافية في الفصل الخامس من الكتاب.

يمكن تعميم طريقة لاجرانج لحل المسألة السابقة في حالة التعبير عن القيود بمتباينات بدلاً من المعادلات كأن يكون المطلوب مثلاً تكبير دالة الهدف:

$$z = f(\mathbf{x}) \qquad (١,١٣)$$

تحت الشروط:

$$g_i(\mathbf{x}) \le 0 \quad , \quad i = 1 , \dots , m \qquad (١,١٤)$$

حيث إن $\mathbf{x} \ge 0$ ؛ أي يحقق شرط عدم السالبية.

شروط (كون – توكر) يمكن أن تعطينا الشروط الضرورية –وربما الكافية– تحت بعض الاحتياطات لحل المسألة بدالة هدف(١٣ , ١٢) وقيود (١٤ , ١)، كما سنبين ذلك في الفصل الخامس بالتفصيل فيما بعد.

النوع الأخير الذي تعرضنا له في بداية هذا الفصل هو خوارزميات البرمجة غير الخطيـــة لحل المســـائل غير المقيدة التي تشمل عدة طرق منها طريقة البحث المباشر (direct search method) التي نفرض فيها أن دالة الهدف وحيدة المنوال (unimodal) في مجال البحث عن حل أمثل لها. سنستخدم طريقة الانحدار (gradient) لحل الخوارزميات غير المقيدة كذلك. أما في حالة المسائل المقيدة (constrained) فإننا نستخدم برمجة الفصل (separable programming) والمقصود من ذلك أنه يمكن التعبير عن دالة الهدف $f(x_1 ,..., x_n)$ أو تحويلة منها كمجموع n من الدوال كل منها وحيدة البعد، أي أن:

$$f(x_1 , ... , x_n) = f(x_1) + ... + f(x_n) \qquad (١ , ١٥)$$

من الواضح أنه قد يتعذر فصل المتغيرات في بعض الدوال عن بعضها، ولكن في بعض الحالات يمكن ذلك. فمثلاً لو كانت دالة الهدف:

$$f(x_1 , x_2) = x_1 x_2 \qquad (١ , ١٦)$$

عندئذ يمكننا أن نفرض: $y = x_1 x_2$

ويكون لدينا $\text{Ln } y = \text{Ln } x_1 + \text{Ln } x_2$ ، وتصبح المسألة عبارة عن تكبير

$$z = y \qquad (١ , ١٧)$$

مثلاً حسب القيد:

$$\text{Ln } y = \text{Ln } x_1 + \text{Ln } x_2 \qquad (١ , ١٨)$$

وهي دالة منفصلة في متغيراتها.

ومن الطرق كذلك برمجة الفصل المحدبة (separable convex programming) حيث نقول عن دالة $f(x)$ إنها محدبة إذا كان:

$$f\left(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2\right) \leq \theta\, f\left(x_1\right) + (1 - \theta)\, f\left(x_2\right)$$

لجميع قيم x_2 , x_1 في نطاق تعريف الدالة وجميع قيم θ

وبحيث :

$$0 \leq \theta \leq 1$$

ومن هذه الطرق كذلك البرمجة التربيعية (quadratic) وتكون فيها تكون دالة الهدف والقيود من الدرجة الثانية في بعض متغيرات القرار والبرمجة الهندسية (geometric) والعشوائية (stochastic) التي يكون فيها بعض معالمها أو كلها متغيرات عشوائية وتحل أساساً بتحويل طبيعتها الاحتمالية إلى طبيعة وصفية محددة.

في الفصول القادمة من هذا الكتاب سندرس معظم هذه الطرق بالتفصيل، ونحاول استخدام الأمثلة لتبسيط خطوات الحل كما سنعمل على سرد بعض الحقائق الرياضية، والنظريات التي تنص على مفاهيم نحتاج إليها في توضيح طرقنا ولكنها لا تدخل أساساً في موضوع كتابنا، وذلك في ملاحق الكتاب.

نعرض في البندين الرابع والخامس من هذا الفصل مجموعة من الأمثلة التي يغلب عليها التطبيق، ونحاول صياغتها على شكل مسائل بحوث عمليات، وذلك لحل بعضها في الفصول القادمة بغرض تدريب القارئ على صياغة المسائل بأشكال يمكن معالجتها بالأساليب التي أشرنا إليها بعد تمييزها عن غيرها، ومعرفة أي الطرق أفضل للتعامل معها، وحتى الحصول على الحل الأمثل.

(١,٤) صياغة مسائل برمجة خطية

يجب على المتخصص في بحوث العمليات عموماً والبرمجة فيها أو التخطيط على وجه الخصوص أن تكون لديه القدرة على استيعاب المسائل المختلفة، وفهمها جيداً حتى يتمكن من وضعها في صيغة يمكنه التعامل معها بما يتوافر له من طرق، وبالتالي حلها. وقبل عرض بعض الملاحظات على صياغة مسألة البرمجة الخطية في هذا البند، وكذلك عرض الصياغة العامة لمسائل البرمجة الخطية، فإننا نورد مجموعة من الأمثلة لتوضيح الهدف من أهمية الصياغة.

مثال (١,٤)

يقوم مصنع بإنتاج نوعين من المواد البلاستيكية المصنعة، ولتكن B,A ، وتحتاج كل وحدة من النوعين لتصنيعها لعدد معين من ساعات العمل، وكمية معينة من المواد الخام بالكيلوجرام. يتوافر يومياً لدى المصنع ساعات عمل، وكميات مواد خام قصوى لا يمكن زيادتها كما هو محدد بالجدول رقم (١,١).

الجدول رقم (١,١).

كمية المواد الخام بالكجم	ساعات العمل	------
3	4	النوع A
5	2	النوع B
109	80	القيم القصوى

فإذا كانت الأرباح العائدة من بيع وحدة من الصنف A عشرة ريالات، ومن الصنف B ثمانية ريالات. أوجد الصيغة المناسبة لهذه المسألة لتكون مسألة برمجة خطية.

الحل

نحدد أولاً متغيرات القرار (decision variables) ، وهي المتغيرات التي تحدد قيمها الحل الأمثل لمسألة البرمجة.

في هذه الحالة يوجد متغيران للقرار وهما كمية الوحدات المنتجة من الصنف أو النوع A ولتكن x_1 وكمية الوحدات المنتجة من النوع B ولتكن x_2.

نلاحظ أن الهدف هو الحصول على أكبر عائد ربحي من الإنتاج، أي تكبير دالة الربح وهي دالة الهدف التي تأخذ الصيغة:

$$z = 10x_1 + 8x_2$$

وينحصر الحل في البحث عن قيم مثلى للمتغيرين x_1 ، x_2 تجعل Z أكبر ما يمكن،

ولكن تجب مراعاة قيود على عملية إنتاج النوعين؛ فساعات العمل لا تزيد عن 109 ساعة، وكمية المواد الخام لا تزيد على 80 كجم. أي أننا ملزمون بمراعاة القيود:

$$3x_1 + 5x_2 \leq 109$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 80$$

يلاحظ أن عدد الوحدات المنتجة غير سالبة أي أننا نراعي شرطي عدم سالبية متغيرات القرار:

$$x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0$$

أصبحت مسألة الإنتاج عبارة عن مسألة برمجة خطية المطلوب فيها إيجاد القيمة العظمى لدالة الهدف:

$$z = f(x_1 \ , x_2) = 10x_1 + 8x_2 \quad (١,١٩)$$

تحت القيود:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\leq 109 \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 80 \end{aligned} \quad (١,٢٠)$$

وقيود عدم السالبية:

$$x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \quad (١,٢١)$$

مثال (١,٢)

يستخدم أحد وكلاء شركة إنتاج عطور عالمية أسلوب الإعلان في الراديو والتليفزيون، فإذا علمنا أن تكلفة دقيقة للإعلان في التليفزيون هي 400 ريال، وللإعلان في الراديو 20 ريال للدقيقة، وترغب الشركة في استخدام الراديو أربعة أمثال استخدامها للتليفزيون على الأقل. كما لاحظت الشركة أن الإعلان في التليفزيون يؤدي إلى توليد مبيعات تساوي في المتوسط مائة ضعف ما يولده الإعلان في الراديو في دقيقة واحدة. فإذا كان بند الإعلان المالي في ميزانية الشركة محددا

بمبلغ أربعة آلاف ريال في الشهر فأوجد صياغة البرمجة الخطية لهذه المسألة للبحث عن أفضل توزيع لبند الإعلان في الشركة بين وسيلتي الإعلان.

الحل

لنفرض أن مجموع أزمنة الإعلان في الراديو لمدة شهر هي x_1، وأن مجموع أزمنة الإعلان في التليفزيون للمدة نفسها هي x_2.

عندئذ تكون دالة الهدف المطلوب تكبيرها هي عائد الأرباح من الإعلان في وسيلتي الإعلام أي أن:

$$z = f(x_1 , x_2) = x_1 + 25x_2$$

تحت قيود محددة، وهي أن مجموع ما يصرف على الوسيلتين لا يزيد على البند المخصص لذلك؛ أي أن:

$$20x_1 + 400x_2 \leq 4000$$

والقيد الثاني هو رغبة الشركة في استخدام الراديو اربعة أمثال استخدامها للتليفزيون على الاقل أي أن:

$$x_1 \geq 4x_2$$

من المعروف كذلك أن مدة الإعلان لا يمكن أن تكون سالبة، أي أن $x_2 \geq 0,\ x_1 \geq 0$، من ذلك تصبح المسألة هي برمجة خطية المطلوب فيها إيجاد القيمة العظمى لدالة الهدف:

$$z = x_1 + 25x_2 \qquad (١,٢٢)$$

تحت القيود:

$$\begin{aligned} 20x_1 + 400x_2 &\leq 4000 \\ x_1 - 4x_2 &\geq 0 \end{aligned} \qquad (١,٢٣)$$

وقيود أو شروط عدم السالبية وهي أن:

بمبلغ أربعة آلاف ريال في الشهر فأوجد صياغة البرمجة الخطية لهذه المسألة للبحث عن أفضل توزيع لبند الإعلان في الشركة بين وسيلتي الإعلان.

الحل

لنفرض أن مجموع أزمنة الإعلان في الراديو لمدة شهر هي x_1، وأن مجموع أزمنة الإعلان في التليفزيون للمدة نفسها هي x_2.

عندئذ تكون دالة الهدف المطلوب تكبيرها هي عائد الأرباح من الإعلان في وسيلتي الإعلام أي أن:

$$z = f(x_1 \ , x_2) = x_1 + 25x_2$$

تحت قيود محددة، وهي أن مجموع ما يصرف على الوسيلتين لا يزيد على البند المخصص لذلك؛ أي أن:

$$20x_1 + 400x_2 \leq 4000$$

والقيد الثاني هو رغبة الشركة في استخدام الراديو اربعة أمثال استخدامها للتليفزيون على الاقل أي أن:

$$x_1 \geq 4x_2$$

من المعروف كذلك أن مدة الإعلان لا يمكن أن تكون سالبة، أي أن $x_2 \geq 0, \ x_1 \geq 0$، من ذلك تصبح المسألة هي برمجة خطية المطلوب فيها إيجاد القيمة العظمى لدالة الهدف:

$$z = x_1 + 25x_2 \qquad (١,٢٢)$$

تحت القيود:

$$\begin{aligned} 20x_1 + 400x_2 &\leq 4000 \\ x_1 - \quad 4x_2 &\geq 0 \end{aligned} \qquad (١,٢٣)$$

وقيود أو شروط عدم السالبية وهي أن:

$$x_1 \ , x_2 \geq 0$$

يلاحظ في هذا المثال أن معامل متغير القرار x_2 في القيد الثاني سالب.

مثال (٣,١)

أعلن أحد المصارف المحلية عن وجود صندوقي استثمار؛ حيث إن عائد الأرباح في الصندوق الأول 7% في العام، وعائد الربح في الصندوق الثاني 20% لكل سنتي استثمار. علماً أن شروط الصندوق الثاني تتطلب الاستثمار في سنتين أو مضاعفاتها، مثل: أربع سنوات أو ست سنوات.. إلخ. يود أحد الموظفين بناء منزل بعد الحصول على قرض من صندوق التنمية العقارية الذي يتوقع أن تتم إجراءات حصوله عليه بعد ثلاث سنوات من الآن. فإذا كان لدى الموظف مائة ألف ريال يود استثمارها في صندوقي البنك للحصول على أكبر عائد ربحي ممكن. المطلوب وضع المسألة في صيغة برمجة خطية.

الحل

نفرض أن متغيرات القرار هي المبلغ المستثمر في الصندوق الأول في السنوات الأولى والثانية والثالثة وهي $x_{11}, \ x_{21}, \ x_{31}$ على الترتيب. وكذلك المبلغ المستثمر في الصندوق الثاني في السنة الأولى والثانية $x_{12}, \ x_{22}$ على الترتيب، ولأن الاستثمار في الصندوق الثاني لسنتين، فإنه لا يمكن الاستثمار فيه في نهاية السنة الثانية.

من الواضح أن ما يحصل عليه الموظف في نهاية السنة الثالثة هو حصيلة المبلغ المستثمر في الصندوق الأول في السنة الثالثة مع أرباحها؛ أي $1.07x_{31}$، وحصيلة المبلغ المستثمر في الصندوق الثاني في السنة الثانية مع أرباحها؛ أي $1.2x_{22}$، فتكون دالة الهدف المراد تكبيرها هي:

$$z = 1.07x_{31} + 1.20x_{22}$$

لتحديد القيود نلاحظ أن المبلغ المستثمر في كل من الصندوقين في السنة الأولى يجب ألا يتجاوز مائة ألف ريال، أي أن:

$$x_{11} + x_{12} \leq 100{,}000$$

كما أن المستثمر في كل من الصندوقين في السنة الثانية يجب ألا يتجاوز حصيلة نتاج الاستثمار في الصندوق الأول؛ أي أن:

$$x_{21} + x_{22} \leq 1.07x_{11}$$

أما في السنة الثالثة فلا يمكن الاستثمار إلا في الصندوق الأول، ويجب ألا يتجاوز المبلغ حصيلة استثمار السنة الثانية من الصندوق الأول، والسنة الأولى من الصندوق الثاني؛ أي أن:

$$x_{31} \leq 1.7x_{21} + 1.20x_{12}$$

ومن الواضح أن x_{i1} لكل $i=1,2,3$ و x_{i2} لكل $i=1,2$ يجب أن تكون موجبة.

تصبح المسألة هي إيجاد القيمة العظمى لدالة الهدف:

$$z = f\left(x_{31}\ , x_{22}\right) = 1.07x_{31} + 1.20x_{22} \qquad (١,٢٤)$$

تحت القيود:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} \qquad\qquad\qquad & \leq 1000 \\ -1.07x_{11} \qquad + x_{21} + x_{22} \qquad & \leq 0 \qquad (١,٢٥) \\ 1.2x_{12} - 1.07\ x_{21} \qquad + x_{31} & \leq 0 \end{aligned}$$

وقيود الإشارة هي:

$$x_{11}\ , x_{12}\ , x_{21}\ , x_{22}\ , x_{31} \geq 0$$

نلاحظ من الأمثلة السابقة أن البرمجة الخطية مجال تطبيقي كبير، كما أننا نلاحظ أن لمسائل البرمجة الخطية صياغة عامة يمكن إيجازها على أنها إيجاد القيم المثلى لمتغيرات القرار x_n ,...., x_1 والتي تجعل دالة الهدف أكبر ما يمكن، مثلاً،

حيث إن دالة الهدف هي :

$$z = f(x_1 \ , \ \dots \ , \ x_n) = \mathbf{C}^T \mathbf{X}$$

حيث إن :

$$\mathbf{C} = (c_1 \ , \ \dots \ , \ c_n) \ , \ \mathbf{X} = (x_1 \ , \ \dots \ , \ x_n)^T$$

تحت القيود :

$$\mathbf{A} \ \mathbf{X} \leq \mathbf{b}$$

حيث إن :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \ , \ \mathbf{b} = (b_1 \ , \ \dots \ , \ b_n)^T$$

وبحيث إن قيم a_{ij}, b_j, c_j لكل $j=1,\dots,n$, $i=1,\dots,m$ قيم حقيقية معروفة.
بالإضافة إلى قيد الإشارة وهو

$$\mathbf{X} \geq 0$$

ونقصد بذلك في هذا السياق أن :

$$x_j \geq 0 \ \text{لكل} \ j = 1 \ , \ \dots \ , \ n$$

(٥ , ١) صياغة مسائل برمجة غير خطية

كما لاحظنا في البند الرابع أن مجال البرمجة غير الخطية واسع جداً، وموضوعاتها متعددة ومتفرعة . ولعل أهم اختلافاتها عن البرمجة الخطية ظهور متغيرات القرار في دالة الهدف أو في القيود المرافقة (إن وجدت) في صيغة غير خطية . ولتبسيط الصياغة العامة لهذه المسائل نأخذ شكلاً أعم لمثال (٤-٣) السابق حيث تتعدد مجالات الاستثمار في الصناديق أو الشركات التي يمكن شراء أسهم منها بعد دراسة عوائد أسهمها الربحية .

مثال (٤ , ١)

يود أحد صناديق التقاعد في إحدى المؤسسات (أو الشركات) استثمار ودائع التقاعد والتي بلغت b ريال سعودي في حقيبة للأسهم ولعدة شركات، وليكن عددها n. من المعلوم أن متوسط عائد السهم من الأرباح للشركة j هو c_j وتباين عائدها هو σ_{jj}. فإذا كانت β مقياس رغبة المستثمر في الموازنة بين العائد والمخاطرة المتوقعين من عملية الاستثمار. المطلوب وضع هذه المسألة على صيغة برمجة غير خطية.

الحل

يلاحظ أن σ_{jj} تقيس لنا مخاطرة الإستثمار في شركة j حيث $j=1,2,\dots,n$ وهي التباين (variance) أما σ_{ij} فهي التغاير (covariance) لعائد الشركة i والشركة $(i \neq j)$. نعلم أن c_j متوسط عائد السهم في الشركة j ولنفرض أن جميع هذه الثوابت معطاة في المسألة بقيم معروفة.

نفرض أن متغيرات القرار هي $x_n ,\dots, x_1$، التي تمثل عدد الأسهم المشتراة في الشركات الأولى وحتى رقم n، وبالتالي فإن عائد أرباح الأسهم المتوقع هو:

$$R(\mathbf{x}) = R\left(x_1 , \dots , x_n\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

والتباين أو الخطر (risk) المرافق للاستثمار هو:

$$S(\mathbf{x}) = V\left(x_1 , \dots , x_n\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j$$

ودالة الهدف المراد تكبيرها هي:

$$z = f\left(x_1 , \dots , x_n\right) = R(\mathbf{x}) - \beta S(\mathbf{x})$$

حيث تكون β صفراً إذا تجاهلنا الخطورة الكامنة وراء الاستثمار، وقيمة β الكبيرة تعني الرغبة الشديدة في تقليل مخاطر الاستثمار. فإذا كان سعر السهم من الشركة j

هو p_j فإن مسألة البرمجة غير الخطية هي إيجاد القيمة الكبرى لدالة الهدف:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \beta \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j \qquad (١,٢٦)$$

تحت القيود:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \le b \qquad (١,٢٧)$$

وشروط الإشارة أو عدم السالبية هي:

$$x_j \ge 0 \quad , \quad j = 1 , \dots , n$$

ملاحظات

١- عندما تتلاشى القيود (١,٢٧) فإن المسألة تصبح برمجة غير خطية غير مقيدة.

٢- عندما تكون جميع حدود الدالة f تربيعية في أحد المتغيرات أو حاصل ضرب متغيرين فإن المسألة هي برمجة تربيعية.

٣- عندما تكون f محدبة (convex) ودالة القيود $g(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} x_j$ محدبة فالمسألة عبارة عن برمجة محدبة.

٤- عندما تكون القيود خطية ودالة الهدف غير خطية تسمى برمجة بقيود خطية. عندما يمكن التعبير عن دالة الهدف z كنسبة بين دالتين، مثل عامل $f_1(x)$ لكل ساعة $f_2(x)$ تسمى المسألة برمجة نسبية (fractional).

٥- عندما تكون $x_1 = x$ لكل $i=1,2,\dots,n$ تصبح المسألة برمجة أحادية البعد مقيدة في حال وجود القيد أو غير مقيدة في حال تلاشيه.

(١,٦) تمارين

١- اذكر تعريفاً لبحوث العمليات؟

٢- أذكر ثمانية مجالات أو تخصصات تقع ضمن اهتمام العاملين ببحوث العمليات؟

٣- تحدث بنبذة تاريخية موجزة لنشأة علم بحوث العمليات وتطور أساليب الأمثلية؟

٤- ما هي أهم خطوات معالجة مشكلةو باستخدام أساليب بحوث العمليات ؟

٥- ما المقصود بالبرمجة الخطية وما أهم الطرق لحلها؟

٦- عدد الأقسام والشعب الرئيسة لمسائل البرمجة غير الخطية، وحدد صياغة بعض منها، واذكر أساليب حلها؟

٧- ينتج أحد المخابز في مدينة الرياض نوعين من الخبز مفرود وشطائر. إذا علمنا أن رغيف المفرود يحتاج إلى 100 جرام من الطحين، 0.1 عامل/ ساعة ويحتاج رغيف الشطائر إلى 90 جم من الطحين، 0.2 عامل/ ساعة. وكانت أرباح المخبز من رغيف المفرود 0.1 ريال، ومن الشطائر 0.15 ريال. فإذا كان يتوافر لدى المخزن 90 كجم من الطحين، 200 عامل/ ساعة يومياً، فأوجد الصياغة المناسبة لهذه المسألة لتكون برمجة خطية؟

٨- تعاقدت إحدى مؤسسات الأمن على حراسة مجمع سكني تجاري بحيث إن المجمع يحتاج في أي ساعة خلال الأربع والعشرين ساعة إلى s_i حارس ويعمل كل حارس على مدى ست ساعات متواصلة. وتتحمل المؤسسة تكاليف إضافية مقدارها c_i عن كل ساعة يزيد فيها عدد الحراس عن s_i أوجد صياغة لهذه المسألة كبرمجة خطية يمكن عن طريقها تقليل التكاليف الإضافية؟

٩- إذا كان المطلوب إيجاد أقل بعد للنقطة (x , y) عن نقطة الأصل بحيث إن :

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 4$$

$$xy \le 6$$

فأوجد الصياغة المناسبة لها حتى تكون على صيغة برمجة غير خطية وحدد نوع هذه المسألة؟

١٠- إذا كان المطلوب إيجاد القيمة العظمى للدالة:

$$z = f(\mathbf{x}) = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

تحت القيد:

$$x_1 + 2x_2 < 2$$

وقيود الإشارة:

$$x_1 , x_2 \ge 0$$

فحدد نوعية البرمجة، والطرق الممكنة لحلها؟

الفصل الثاني

البرمجة الخطية

• مقدمة • الطريقة البيانية ومبدأ الثنائية • طريقة السمبلكس • تمارين

(٢,١) مقدمة

يرى كثير من الباحثين في بحوث العمليات أو المستخدمين لتقنياتها، أن تطوير أساليب البرمجة الخطية من أهم معالم التقدم العلمي في منتصف القرن العشرين. ونظراً لدور البرمجة الخطية في معالجة المشكلات أو المسائل الاقتصادية الإدارية الحديثة فقد جذبت اهتمام العديد من الباحثين في المجالات الأخرى. وقد أدى تقدم تقنيات الحاسب الآلي إلى دفع عجلة البحث فيها. أصبحت البرمجة الخطية تحتل نصيباً كبيراً من مجالات بحوث العمليات، كما صدر العديد من الكتب الدراسية المتقدمة التي تعرض أساليب بحوث العمليات أو تدرس كيفية استخدامها وتطبيقها في المجالات العملية الأخرى.

الهدف الأساسي للبرمجة الخطية هو كيفية استغلال مصادر إمكانيات محدودة بنسب مثالية أو تكاد تكون مثالية للوصول إلى أفضل النتائج. تعتمد

البرمجة الخطية على النماذج الرياضية لوصف المشكلة المطلوب دراستها. ولعل كلمة البرمجة الواردة في اسمها تعني التخطيط أو التوزيع الأمثل أما كلمة خطية فإشارة إلى أن جميع الدوال المستخدمة خطية «رياضياً» في متغيراتها؛ أي أن البرمجة الخطية تعالج مسائل تهدف إلى تكبير أو تصغير دالة خطية معينة تسمى «دالة الهدف» ضمن مجال محدود يعتمد على مجموعة من الشروط أو القيود الخطية المفروضة تسمى «القيود». غالباً ما تكون الشروط متراجحات (متباينات) أو أحياناً معادلات. يشار إلى المتغيرات الخطية الداخلة في تحديد دالة الهدف أو القيود بمتغيرات القرار.

يعتبر نموذج نيومان (Von Neuman) الخطي للاقتصاد المتطور من أهم المساهمات في مجال البرمجة الخطية وذلك في عام ١٩٣٥م، قام بعدها ليونتيف (Leontief) بدراسة نموذج برمجة خطية للدخل والإنفاق في الاقتصاد الأمريكي.

ربما يعود أول تطبيق للبرمجة الرياضية بشكل عام في المجال العسكري إلى فريق بحوث العمليات الأمريكي برئاسة المارشال وود (Wood) وذلك عند دراسة أفضل توزيع للإمكانيات في القوات الجوية. أما طريقة السمبلكس (Simplex) في حل مسائل البرمجة الخطية فتعود إلى دانتزج (Dantzig) والذي كان عضواً في فريق وود لبحوث العمليات وذلك في عام ١٩٤٧م. ساهم بعد ذلك عدد من الباحثين في تطوير أساليب البرمجة الخطية فقدموا لنا الحل بطريقة المسألة المرافقةأو الثنائية (Dual) والتطبيقات في الصناعة والإنتاج ومسألة النقل (Transportation) ومسألة الشحن (Transhipment) ومسألة التخصيص (Assignment).

لن ندرس في هذا الباب مسائل البرمجة الخطية السابقة بالتفصيل ولكننا سندرس فقط طريقة صياغة مسائل البرمجة الخطية المباشرة والطريقة البيانية أو طريقة السمبلكس لحل هذه المسائل، ونرجع القارئ إلى المراجع في البرمجة الخطية للإلمام بالتفصيلات الأخرى والحالات الخاصة

تكون الصياغة العامة لكثير من مسائل البرمجة الخطية على صورة إيجاد القيم المثلى للمتغيرات $x_n , \ldots , x_1$ التي تجعل دالة الهدف Z أكبر ما يمكن حيث إن:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

وذلك تحت القيود أو الشروط:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \leq b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \leq b_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

وشروط الإشارة هي أن:

$$x_1 \geq 0 , x_2 \geq 0 , \ldots , x_n \geq 0$$

فمثلاً، قد تكون دالة الهدف Z هي الربح والمطلوب تكبيرها، حيث تمثل $a_{11} , a_{12} , \ldots . a_{1n}$ عدد ساعات العمل التي تلزم لإنتاج وحدة واحدة من المنتجات الأول والثاني والنوني على الترتيب في تكون مقادير الربح لهذه الوحدات هي $c_1 , c_2 , \ldots , c_n$، وللمتغيرات $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ على الترتيب، وأن ساعات العمل التي يمكن توفيرها لذلك هي b_1، كما قد تكون $a_{21} , a_{22} , \ldots , a_{2n}$ هي المواد الأولية من نوع معين اللازمة لتصنيع وحدة من هذه المتغيرات والتي يتوافر منها b_2. وقد تكون $a_{31} , a_{32} , \ldots , a_{3n}$ هي أسعار شراء وحدة وزن أو حجم من هذه المتغيرات والرصيد المتيسر هو b_3. . . وهكذا.

وبشكل عام يمكن كتابة الصيغة السابقة باختصار؛ فيكون المطلوب هو إيجاد القيمة المثلى للمتغيرات $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ أو $\mathbf{x} = (x_1 , x_2 , \ldots . x_n)$ التي

تجعل دالة الهدف Z أكبر ما يمكن حيث إن :

$$\mathbf{Z} = \mathbf{C}^{T}\ \mathbf{X}$$

تحت الشروط :

$$A\,X \le b$$

وشرط الإشارة :

$$X \ge 0$$

ويعني الشرط الأخير أن كل مركبة x_i هي $x_i \ge 0$ لكل $i = 1 , 2 , \ldots , n$، وحيث إن :

$$\mathbf{X}^{T} = (x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$$

$$\mathbf{C}^{T} = (c_1 , c_2 , \ldots , c_n)$$

$$b^{T} = (b_1 , b_2 , \ldots , b_n)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(١,١,٢) الصيغة القياسية لنماذج البرمجة الخطية

من المعروف أن نماذج البرمجة الخطية تحتوي على شروط من النوع ≤، =، ≥. وتكون متغيرات القرار موجبة أو غير مقيدة الإشارة. ولحل مسائل البرمجة الخطية، لابد من وضعها في صيغة عامة تسمى الصيغة القياسية (standard form)، ولهذه الصيغة القياسية الخواص الآتية :

١- كل القيود معادلات طرفها الأيمن موجب .

٢- كل المتغيرات موجبة .

٣- المطلوب تصغير أو تكبير دالة الهدف .

والآن نوضح كيفية وضع أي برنامج خطي في الصورة القياسية .

أولاً: القيود

١- القيد الذي من النوع ≥ (≤) يمكن تحويله إلى معادلة بإضافة متغير متمم يضاف للطرف (أو يطرح من الطرف) الأيسر للقيد على حسب إشارة عدم التساوي ، فعلى سبيل المثال :

يضاف إلى الطرف الأيسر للقيد :

$$2x_1 + 4x_2 \leq 8$$

متغير متمم $s_1 \geq 0$ لكي نحصل على المعادلة :

$$2x_1 + 4x_2 + s_1 = 8 \quad , \quad s_1 \geq 0$$

أما إذا كان لدينا القيد التالي :

$$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 \geq 5$$

فنطرح متغير متمم $s_2 \geq 0$ من الطرف الأيسر لنحصل على المعادلة :

$$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - s_2 = 5 \quad , \quad s_2 \geq 0$$

٢- إذا كان الطرف الأيمن من المعادلة سالباً ، فيمكن تحويله إلى موجب بضرب طرفي المعادلة في (1-)، فعلى سبيل المثال المعادلة :

$$3x_1 + 4x_2 = -5$$

تكافىء رياضياً المعادلة :

$$-3x_1 - 4x_2 = 5$$

٣- اتجاه المتباينات (أو المتراجحات) يعكس عندما يضرب كل من طرفي المتراجحة في (1-) ، وعلى سبيل المثال $6 > 3 \;,\; -6 < -3$ ، ولذلك

فالمتراجحة $3x_1 - x_2 \le -5$ يمكن أن تستبدل بالمتراجحة $-3x_1 + x_2 \ge 5$.

ثانياً: المتغيرات: يمكن التعبير عن المتغير x_i غير محدد الإشارة بدلالة الفرق بين متغيرين موجبين باستخدام:

$$x_i = x_i' - x_i'' \quad , \quad x_i' , x_i'' \ge 0$$

ثالثاً: دالة الهدف: رغم أنه من الممكن أن تكون الصيغة القياسية من نوع التكبير أو تصغير دالة الهدف، ولكنه قد يكون من المفيد أحياناً تحويل أي من الصيغتين إلى الأخرى.

ومن البدهي أن تكبير أي دالة يكافئ تصغير المعكوس الجمعي الدالة والعكس صحيح، وعلى سبيل المثال تكبير الدالة:

$$Z = 6x_1 - 7x_2 - 4x_3$$

يكافئ رياضياً تصغير الدالة:

$$-Z = -6x_1 + 7x_2 + 4x_3$$

ويعني التكافؤ هنا أنه بالنسبة لنفس فئة الشروط، فإن القيم المثلى للمتغيرات x_3 , x_2 , x_1 هي نفسها في كلتا الحالتين، والفرق الوحيد بين الحالتين هو في قيمتي الهدف، ومع أنها تكون متساوية عددياً، إلا أنها سوف تظهر بإشارات معاكسة.

كما أن بعض المسائل غير الخطية تتحول في بعض مراحل الحل إلى مسائل خطية (كما سنوضح ذلك في الفصول القادمة) تحل باستخدام طريقة السمبلكس.

سوف نكتفي في هذا الفصل بدراسة طريقتين لحل مسائل البرمجة الخطية هما طريقة بيانية (graphical method)، وطريقة السمبلكس (simplex)، ويستخدم في التوضيح حل مسائل البرمجة الخطية في متغيرين أساسيين للقرار لأن تعميم ذلك لأكثر من متغيرين يمكن تنفيذه باستخدام الطرق نفسها.

(٢,٢) الطريقة البيانية ومبدأ الثنائية

(٢,٢,١) الطريقة البيانية

تعرف هذه الطريقة لحل مسائل البرمجة الخطية بالطريقة البيانية أو بطريقة الرسم (graphical method)، ومع أنه يمكن استخدامها لحل مسائل البرمجة الخطية في متغيرين أو أكثر، إلا أننا سنقتصر على متغيرين. تعتبر هذه الطريقة القاعدة التي نعتمد عليها في توضيح خطوات طريقة السمبلكس التي سنقدمها في البند التالي. ولنوضح الطريقة البيانية نورد مثالاً على ذلك.

مثال (٢,١)

أوجد القيمة الكبرى للدالة:

$$Z = 4x_1 + 5x_2$$

تحت الشروط أو القيود:

$$3x_1 + 7x_2 \leq 10$$

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

وشروط الإشارة:

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$$

الحل

في هذه الحالة تسمى Z بدالة الهدف (objective function) ويسمى المتغيران x_1 , x_2 بالمتغيرين الأصليين (basic variables) كما يُسمّى الشرطان:

$$2x_1 + x_2 \leq 3 \quad , \quad 3x_1 + 7x_2 \leq 10$$

بالشرطين الداليين (functional constraints) أما الشرطان الأخيران فيطلق عليهما شرطا الإشارة (sign constraints)، أو شرطا عدم السالبية للمتغيرات الأصلية. من

الملاحظ أن دالة الهدف والشروط الدالية دوال خطية في المتغيرين x_1 , x_2.

نبدأ الحل بتحويل متباينات القيود إلى متساويات فنجد أن :

$$3x_1 + 7x_2 = 10$$

$$2x_1 + x_2 = 3$$

من الواضح أن شرطي الإشارة $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ يحددان منطقة الربع الأول من المحورين x_1 , x_2 ؛ أي مجموعة النقاط التي تقع أعلى المحور x_1 وعلى يمين المحور x_2.

الشرط الأول مستقيم يقطع محوري x_1 , x_2 في النقطتين :

$$A = \left(\frac{10}{3}, 0\right) \ , \ B = \left(0, \frac{10}{7}\right).$$

بالمثل نلاحظ أن مستقيم الشرط الثاني يقطع نفس المحورين في النقطتين $C = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $D = (0, 3)$ كما أن نقطة تقاطع المحورين هي $(0, 0) = O$.

وبما أن مستقيمي الشرطين يحددان أعلى حد للحل المقبول لأن الشرط الأول ينص على أن الحل يقع على أو تحت المستقيم CD.

بحل معادلتي المستقيمين :

$$3x_1 + 7x_2 = 10$$

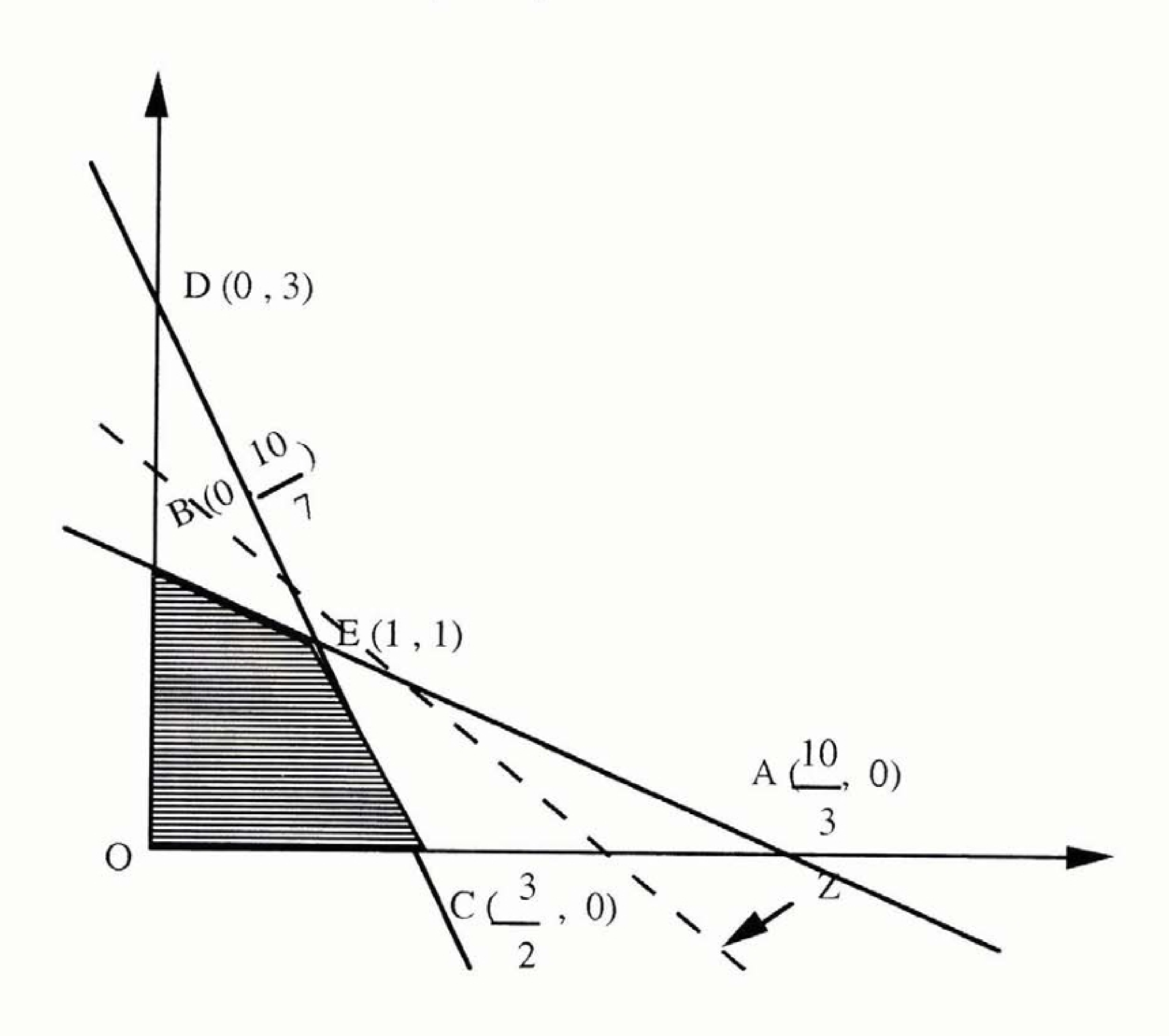
$$2x_1 + x_2 = 3$$

نجد أن نقطة تقاطعهما هي E=(1,1)، ومن ذلك نلاحظ أن منطقة الحلول المقبولة التي تحقق جميع الشروط هي المضلع BOCE ، ومن ذلك نلاحظ أن أي نقطة على المستقيمات BE أو EC أو OC أو OB أو داخل المنطقة المظللة تمثل حلاً ممكناً (feasible solution)، وأي نقطة خارج هذه المنطقة، لا يمكن أن تمثل حلاً. من الواضح أن الحل الأساسي يتحقق في أربع من النقاط O,A,B,C,D,E

وبالتحديد في النقاط OB,C,E.

وحيث إن لدينا شرطين داليين ومتغيرين فإن عدد الرؤوس الناتجة، أو نقاط التقاطع، هي $6 = \binom{2+2}{2}$ وبصورة عامة، إذا كان لدينا n متغير و m قيد أو شرط دالي فإن عدد الرؤوس الناتجة هو:

$$\binom{m+n}{n} = \frac{(m+n)!}{n!\,m!}$$



الشكل رقم (١ , ٢).

وتنحصر مهمتنا في البحث عن الحلول الممكنة من الإحداثيات التي تعطي دالة الهدف $Z = 4x_1 + 8x_2$ أكبر قيمة. واضح من الشكل البياني رقم (١ , ٢) أن قيمة Z تزداد كلما اقتربنا من نقطة الأصل، وتزداد كلما ابتعدنا عنها علماً أن ميل مستقيم دالة الهدف هو $-\frac{4}{5}$.

من الواضح أن أول نقطة يقابلها مستقيم دالة الهدف في منطقة الحلول المقبولة هي E(1,1) ، وتكون فيها قيمة Z هي:

$$Z_E = 4(1) + 5(1)$$

$$= 9$$

نلاحظ كذلك أن:

$$Z_B = 4(0) + 5\left(\frac{10}{7}\right)$$
$$= 7.14$$

$$Z_C = 4\left(\frac{3}{2}\right) + 4(0)$$

$$= 6$$

من الواضح أن $Z_0 = 0$، وبالتالي فإن الحل الأمثل هو عند E حيث إن $(x_1 , x_2) = (1 , 1)$.

لاحظ أنه عندما يتغير ميل مستقيم دالة الهدف، أي تتغير صيغتها الرياضية، فإن ذلك قد يؤدي إلى تغيير الحل الأمثل. فمثلاً لو كانت $Z = 8x_1 + 2x_2$ فإن الحل الأمثل أو الأكبر يتحقق عند النقطة C ويكون $Z_C = 12$. ويكون الحل الأمثل عند B فيما لو كانت $Z = 3x_1 + 10x_2$، ويكون عند O فيما لو كانت $Z = -5x_1 -6x_2$.

مما سبق نلاحظ ما يلي:

(أ) يتحقق الحل الأمثل في إحدى نقاط الرؤوس لمضلع منطقة الحلول الممكنة وعندها يكون وحيداً.

(ب) إذا وازت مستقيمات دالة الهدف أحد القيود الدالية، فإنه يوجد عدد لا نهائي من الحلول المثلى (أي من قيم x_1 , x_2 التي تعطي أكبر قيمة لدالة الهدف Z).

(جـ) تُسمى الحلول عند نقاط رؤوس مضلع منطقة الحلول الممكنة أساس (basis).

(٢,٢,٢) مبدأ الثنائية

قبل توضيح مبدأ الثنائية، نأخذ مثالاً ونحله بالطريقة البيانية السابقة.

مثال (٢,٢)

أوجد القيمة الصغرى لدالة الهدف

$$U = 10y_1 + 3y_2$$

تحت الشروط الدالية:

$$3y_1 + 2y_2 \geq 4$$

$$7y_1 + y_2 \geq 5$$

وشروط الإشارة:

$$y_1 \geq 0 \ , \ y_2 \geq 0$$

الحل

نكتب معادلات القيود الدالية كما يلي:

$$3y_1 + 2y_2 = 4$$

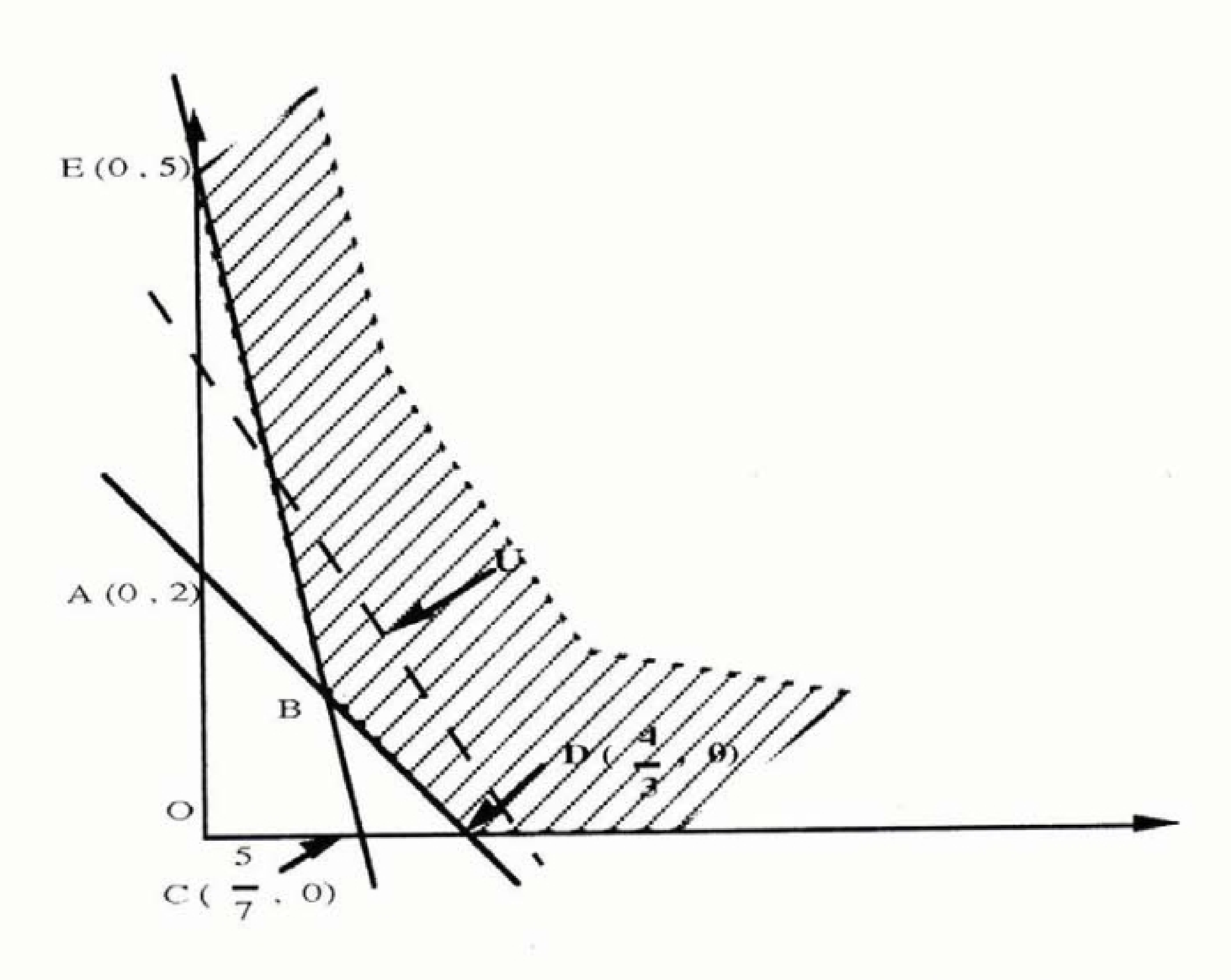
$$7y_1 + y_2 = 5$$

والآن نرسم المستقيمين الناتجين، ونحدد نقط تقاطع كل منهما مع الآخر، وتقاطعهما مع شرطي الإشارة $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ يوضحه الشكل رقم (٢,٢).

نلاحظ أن منطقـة الحلـول الممكنة، من الشكل (٢ , ٢)، هي المنطقـة المظللة المحدودة بالمحورين، والخط المنكسر EBD. وكما سبق بتحريك خط دالة الهدف U في اتجاه نقطة الأصل O نجد قيم U على الترتيب كما يلي:

$$U_E = 10\,(0) + 3\,(5) = 15$$

$$U_D = 10\left(\frac{4}{3}\right) + 3\,(0) = 13.33$$



الشكل رقم (٢ , ٢).

وأخيراً فإن قيمة U عند نقطة تقاطع مستقيمي الشرطين الداليين، أي عند النقطة B حيث إن

$$\left(x_1\ ,\ x_2\right) = \left(\frac{6}{11}\ ,\ \frac{13}{11}\right)$$

$$U_B = 10\left(\frac{6}{11}\right) + 3\left(\frac{13}{11}\right) = 9$$

نلاحظ أن القيمة الصغرى لدالة الهدف U هي القيمة الكبرى لدالة الهدف Z في مثال (١ , ٢).

في الواقع يشار إلى المسألة في المثال (٢ , ٢) بأنها ثنائية المسألة في المثال (١ , ٢)، وبمقارنة المثالين نلاحظ ما يلي :

(أ) تحولت مسألة التكبير في المسألة الأصلية إلى تصغير في المسألة الثنائية .

(ب) جرى عكس اتجاه متباينات القيود الدالية من "≥" إلى "≤" . لاحظ عدم تغير إشارات شروط الإشارة .

(جـ) مصفوفة معاملات القيود في المسألة الثنائية مدور أو (منقول) (transpose) مصفوفة المعاملات في المسألة الأصلية :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad M^T = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

حيث : M , M^T هما مصفوفتا معاملات المسألة الثنائية والأصلية على الترتيب .

(د) المعاملات الثابتة في شروط القيود الدالية في المسألة الأصلية $\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$ أصبحت معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف في المسألة الثنائية (3 ,10) أما معاملات دالة الهدف (5 ,4) في المسألة الأصلية فقد أصبحت المعاملات الثانية للشروط الدالية في المسألة الثنائية $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

ومع أنه يمكن التعامل مع المسألة الأصلية في حالة الحل بطرق البرمجة الخطية ، فإنه يمكن تبسيط المسألة في كثير من الأحيان لو تعاملنا مع المسألة الثنائية (أو المرافقة له) خاصة إذا كانت القيود الهيكلية أقل كثيراً من عدد متغيرات

القرار. أهم أهداف عرض مبدأ الثنائية وكذلك الطريقة البيانية لحل مسائل البرمجة الخطية في هذا البند هو تبسيط خطوات طريقة السمبلكس والتي سندرسها في البند التالي.

(٢,٣) طريقة السمبلكس

لاحظنا في البند (١ , ٢ , ٢) المتعلق بالطريقة البيانية، أن الحل الأمثل يقع دائماً عند أحد أركان مضلع الحلول الممكنة أو نقطة حدية (extreme point) وتعتمد طريقة السمبلكس أساساً على هذه الفكرة.

باستخدام مميزات الطريقة البيانية، فإن طريقة السمبلكس تنفذ كعملية تكرارية، تبدأ عند نقطة ركنية تحقق جميع الشروط. وفي العادة تكون نقطة الأصل، ثم نتحرك إلى نقطة حدية مجاورة (adjacent) تحقق جميع الشروط ثم إلى نقطة أخرى مجاورة وهكذا. . ، حتى نصل إلى النقطة المثلى.

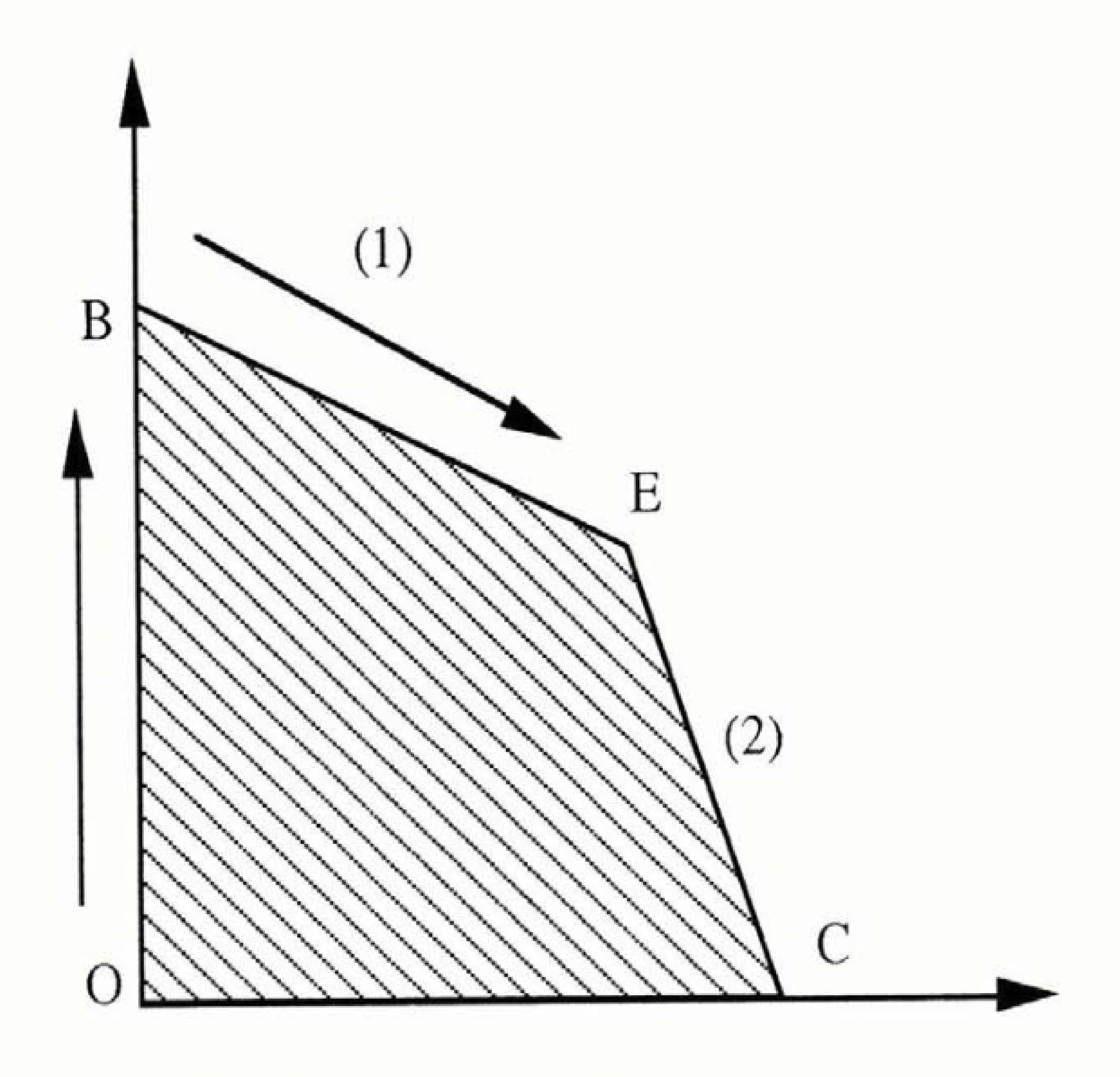
سوف نوضح الطريقة باستخدام المثال (١ , ٢) وفراغ الحل لهذا المثال موضح بالشكل رقم (٣ , ٢). طريقة السمبلكس تبدأ عند النقطة الركنية O التي تسمى عادة بالحل المبدئي (starting solution)، وبعد ذلك نتحرك إلى نقطة ركنية أخرى مجاورة، ومن الممكن أن تكون النقطة C أو النقطة B، ويعتمد الاختيار هنا على معاملات المتغيرات في دالة الهدف، وحيث أن للمتغير x_2 أكبر معامل، والمطلوب تكبير الدالة فإن الحل سوف يتحرك في اتجاه تزايد x_2 حتى يصل إلى النقطة الحدية B. وعند النقطة B نكرر العملية؛ لمعرفة ما إذا كانت توجد نقطة حدية أخرى تحسن أو تزيد من قيمة الدالة، وباستخدام معلومات عن دالة الهدف

تستطيع معرفة فيما إذا كانت هذه النقطة موجودة أم لا . في الحقيقة سيتوقف الحل عند النقطة E وهي النقطة الحدية المثلى .

توجد قاعدتان يتحكمان في اختيار النقطة الحدية التالية (next) عند تنفيذ طريقة السمبلكس :

أولاً : النقطة التالية يجب أن تكون مجاورة للنقطة الحالية ، فعلى سبيل المثال ، في الشكل رقم (٣ , ٢) فإن الحل لا يمكن أن يتحرك من النقطة O إلى النقطة E مباشرة وبدون أن يمر بحافة منطقة الحل المقبول B ← O ؛ أي أنه يتحرك من O إلى B ثم من B إلى E .

ثانياً : لا يمكن أن يرجع الحل أبداً إلي الخلف ؛ أي إلى نقطة حدية إختبرت من قبل . وعلى سبيل المثال في الشكل (٣ , ٢) فإن الحل لا يمكن أن يرجع من B إلى O ، وتلخص فكرة طريقة السمبلكس في أن الحل يبدأ دائماً من نقطة ركنية تحقق جميع الشروط إلى نقطة ركنية أخرى مجاورة لهذه النقطة تحقق جميع الشروط ، وتختبر كل نقطة من حيث إنها النقطة المثلى أم لا قبل التحرك إلى نقطة جديدة . وفي هذا المثال كانت البداية هي النقطة O ، ثم تحركنا إلى النقطة B ووجد أن الحل الأمثل يقع عند النقطة E . لاحظ أننا أجرينا ثلاثة تكرارات (O, B, E) للوصول إلى الحل الأمثل .



الشكل رقم (٣,٢).

توجز الفكرة الأساسية لطريقة السمبلكس بأنها الحاجة إلى تمثيل منطقة الحل المقبول والنقطة الركنية جبرياً. وطريقة الانتقال بين النقط الركنية. يلاحظ كذلك وجود تناظر بين التعريف الهندسي (الطريقة البيانية) والتعريف الجبري (طريقة السمبلكس).

فنجد أن فراغ الحل في الأول يناظر شروط الصيغة القياسية في الثانية، والنقط الركنية في الأولى تناظر الحلول الأساسية (basic solutions) للصيغة القياسية.

سوف نوضح التناظر بين منطقة الحل والصيغة القياسية وبعد ذلك نشرح التفاصيل الحسابية لطريقة السمبلكس.

(١ , ٣ , ٢) تمثيل منطقة الحل في الصيغة القياسية

سوف نوضح كيفية التمثيل الجبري لمنطقة الحل باستخدام المثال (١ , ٢).

تعطى الصيغة القياسية للنموذج كما يلي :

أوجد القيمة الكبرى للدالة :

$$Z = 4x_1 + 5x_2 + 0s_1 + 0s_2$$

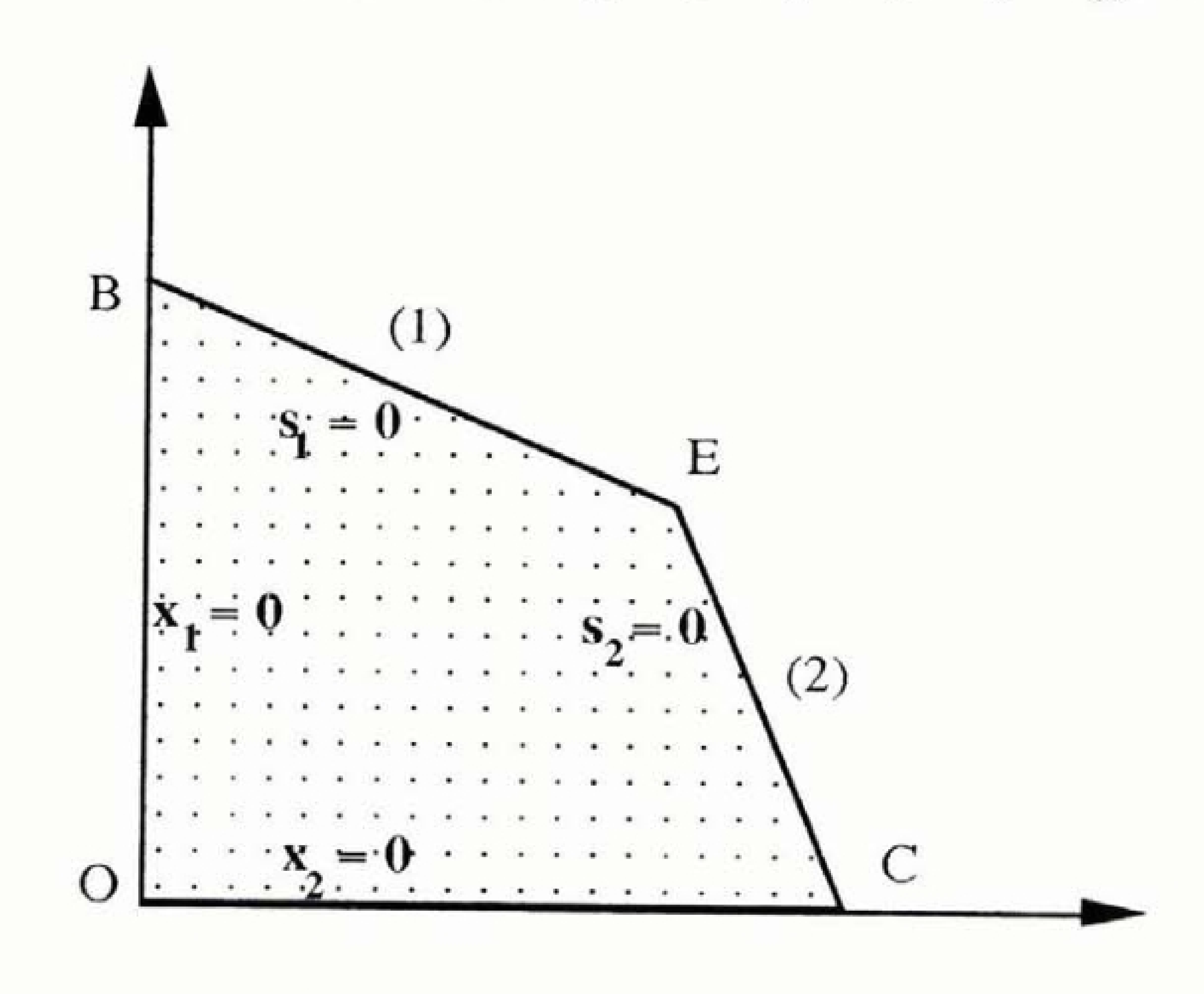
تحت القيود التالية :

$$3x_1 + 7x_2 + s_1 = 10$$

$$2x_1 + x_2 + s_2 = 3$$

$$x_1 \ , \ x_2 \ , \ s_1 \ , \ s_2 \geq 0$$

يحدد الشكل رقم (٤ , ٢) منطقة الحل . يمكن تمثيل كل نقطة في هذه المنطقة بدلالة المتغيرات x_1 , x_2 , s_1 , s_2 من الصيغة القياسية .



الشكل رقم (٤ , ٢).

لتـوضـيح ذلك، لاحظ أن $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ تنقص المعـادلة المتـعلقـة إلى حـافة في فـراغ الحل. وعلى سبـيل المثـال $s_1 = 0$ تناظر $3x_1 + 7x_2 = 10$ التي تمثل الحافة BE . فإذا كـانت $s_i > 0$ فإن هذا سيحرك النقطة الممكنة (feasible point) إلى داخل منطقة الحل.

هدفنا الرئيـسي هو تحـديد النقط الحـدية جـبـرياً، وعند اخـتـبـار الشكل رقم (٢,٤) نلاحـظ أن للقـيـم x_1 , x_2 , s_1 , s_2 المتـعلقـة بالنقـاط C,E,B,O الطراز التالي إذا كانت قيمها تساوي الصفر:

الجدول رقم (٢,١).

النقطة الحدية	المتغيرات الصفرية	المتغيرات غير الصفرية
O	x_1 , x_2	s_1 , s_2
B	x_1 , s_1	x_2 , s_2
E	s_1 , s_2	x_1 , x_2
C	x_2 , s_2	x_1 , s_1

في هذه الطريقة يجب مراعاة الملاحظتين التاليتين:

١- حيث إن للصيغة القياسية معادلتين وأربعة مجاهيل، فإنه لكل نقطة حدية اثنان (4−2=2) من المتغيرات في المستوى الصفري.

٢- تختلف النقط الحدية المتجاورة في متغير واحد فقط.

توضح الملاحظة الأولى أن النقط الحـدية لمنطقـة الحل تحدد جـبرياً بوضع عدد من المتـغيرات مساوياً للصـفر، وهذا العـدد يسـاوي الفرق بين عدد المجـاهيل وعـدد المعادلات وتعتبر هذه خاصية وحيدة للنقطة الحدية. لاحظ من الشكل رقم (٢,٤) أن لكل نقطة غير حدية متغير وحيدا صفريا على الأكثر. وعلى سبيل المثال ليس لكل

النقط الداخلية متغيرات صفرية بينما تقع تماماً كل نقطة غير حدية على حافة متغير صفري .

لاحظ أن الخاصية الوحيدة للنقط الحدية تؤدي إلى هذه الطريقة العامة التالية لتحديد النقط الحدية جبرياً . نفترض أن للصيغة القياسية m معادلة ، و n من المتغيرات حيث $m \leq n$.

تحدد كل النقط الحدية المقبولة باعتبار الحلول الموجبة لعدد m من المعادلات التي نضع فيها عدد n-m من المتغيرات بقيم صفرية .

يسمى الحل الوحيد رياضياً الناتج من وضع n-m من المتغيرات مساوية للصفر حلا أساسياً (basic solution) ، ويسمى الحل الأساسي الذي يحقق شروط عدم السالبية بحل أساسي ممكن (basic feasible solution) وتسمى المتغيرات التي وضعت بقيم صفرية بمتغيرات غير أساسية (non-basic variables) ، كما تسمى المتغيرات الباقية بمتغيرات أساسية (basic variables) .

النتيجة العامة : إن التعريف الجبري للحلول الأساسية في طريقة السمبلكس يحل محل النقطة الحدية في منطقة الحل البياني . ونلاحظ أن أكبر عدد للتكرارات في طريقة السمبلكس يساوي العدد الأكبر من الحلول الأساسية في الصيغة القياسية . وهذا يعني أن عدد تكرارات السمبلكس لا يمكن أن تزيد عن

$$C_m^n = \frac{n!}{(n-m)!\, m!} .$$

الملاحظة الثانية التي ذكرت سابقاً مفيدة جداً حسابياً ، لأن طريقة السمبلكس تتحرك من نقطة غير مثلى إلى نقطة مجاورة لها ، وحيث إن النقط المجاورة تختلف في متغير واحد فقط ، فيمكن تعيين النقطة الحدية التالية المجاورة بتبديل المتغير غير الأساسي الصفري في النقطة الجارية بمتغير أساسي جار .

لتوضيح ذلك لنفرض أننا في المثال (١ , ٢) عند النقطة O ونريد أن نتحرك إلى B . للحصول على B نزيد من قيمة المتغير غير الأساسي x_2 حتى نصل إلى B ، انظر

الشكل (٤ , ٢)، وعند B يصبح المتغير s_1 (كان أساسياً عند O) تلقائياً متغيراً صفرياً، وبالتالي غير أساسي.

يمكن توضيح التبديل الذي حدث بين x_2 و s_1 كما في الجدول التالي:

الجدول رقم (٢ , ٢).

النقط الحدية	المتغيرات الأساسية	المتغيرات غير الأساسية (الصفرية)
O	s_1 , s_2	x_1 , x_2
B	x_2 , s_2	x_1 , s_1

إذا نظرنا إلى الشكل (٤ , ٢) نلاحظ أن النقط المجاورة الحدية تتحدد بتبديل متغير واحد أساسي فقط بمتغير غير أساسي، ومن خلال هذه الفكرة يمكن تبسيط حسابات طريقة السمبلكس.

وتعتمد طريقة السمبلكس كذلك على تحديد المتغيرين: الداخل إلى الحل الأساسي، والمتغير الخارج منه.

المتغير الداخل (entering variable) وهو أحد المتغيرات غير الأساسية الحالية الذي سوف يدخل فئة المتغيرات الأساسية في التكرار التالي، أما المتغير الخارج (leaving variable) فهو المتغير الأساسي في التكرار الحالي الذي سوف يترك فئة الحلول الأساسية في التكرار التالي.

(٢ , ٣ , ٢) خوارزمية السمبلكس

فيما يلي نعرض حسابات خوارزمية السمبلكس في عدد من الخطوات لتبسيط استيعابها.

خطوة (١): باستخدام الصيغة القياسية، نعيّن حلا أساسيا مقبولا بوضع n-m متغير (غير أساسي عند المستوى الصفري).

خطوة (٢): نختار متغيرا داخلا من المتغيرات غير الأساسية والذي يحسن قيمة دالة الهدف، عندما يزداد على الصفر، وإن لم يوجد متغير غير أساسي له هذه الخاصية نتوقف عند ذلك، ويكون آخر حل قد حصلنا عليه هو الحل الأمثل. وإذا وجد متغير غير أساسي له هذه الخاصية ننتقل إلى الخطوة (٣).

خطوة (٣): نحدد الحل الأساسي الجديد بجعل المتغير الداخل أساسيا، والمتغير الخارج غير أساسي، ثم ننتقل إلى الخطوة (٢).

سوف نشرح تفاصيل طريقة السمبلكس باستخدام المثال (١ , ٢). وهذا يتطلب التعبير عن دالة الهدف وكل شروط الصيغة القياسية كما يلي، حيث إن دالة الهدف هي:

$$Z - 4x_1 - 5x_2 - os_1 - os_2 = 0$$

أما معادلات القيود فهي:

$$3x_1 + 7x_2 + s_1 = 10$$

$$2x_1 + x_2 + s_2 = 3$$

كما ذكرنا سابقاً، نحدد الحل الأساسي المبدئي من معادلات القيود بوضع اثنين (2=2-4) من المتغيرات بقيم صفرية شريطة أن يكون الحل الناتج وحيدا ومقبولا. واضح أنه بوضع $x_1 = x_2 = 0$ نحصل على $s_1 = 10$, $s_2 = 3$ (النقطة O في الشكل (٤ , ٢))، ولهذا يمكن استخدام هذه النقطة كنقطة حل مبدئي

خطوة (١): باستخدام الصيغة القياسية، نعيّن حلا أساسيا مقبولا بوضع n-m متغير (غير أساسي عند المستوى الصفري).

خطوة (٢): نختار متغيرا داخلا من المتغيرات غير الأساسية والذي يحسن قيمة دالة الهدف، عندما يزداد على الصفر، وإن لم يوجد متغير غير أساسي له هذه الخاصية نتوقف عند ذلك، ويكون آخر حل قد حصلنا عليه هو الحل الأمثل. وإذا وجد متغير غير أساسي له هذه الخاصية ننتقل إلى الخطوة (٣).

خطوة (٣): نحدد الحل الأساسي الجديد بجعل المتغير الداخل أساسيا، والمتغير الخارج غير أساسي، ثم ننتقل إلى الخطوة (٢).

سوف نشرح تفاصيل طريقة السمبلكس باستخدام المثال (١ , ٢). وهذا يتطلب التعبير عن دالة الهدف وكل شروط الصيغة القياسية كما يلي، حيث إن دالة الهدف هي:

$$Z - 4x_1 - 5x_2 - os_1 - os_2 = 0$$

أما معادلات القيود فهي:

$$3x_1 + 7x_2 + s_1 = 10$$

$$2x_1 + x_2 + s_2 = 3$$

كما ذكرنا سابقاً، نحدد الحل الأساسي المبدئي من معادلات القيود بوضع اثنين (2=2-4) من المتغيرات بقيم صفرية شريطة أن يكون الحل الناتج وحيدا ومقبولا. واضح أنه بوضع $x_1 = x_2 = 0$ نحصل على $s_1 = 10$, $s_2 = 3$ (النقطة O في الشكل (٤ , ٢))، ولهذا يمكن استخدام هذه النقطة كنقطة حل مبدئي

مقبول، وتكون القيمة المناظرة لدالة الهدف Z هي الصفر. وحيث إن كلاً من x_1 , x_2 متغيرين صفريين وكنتيجة لذلك تتغير المعادلة الهدفية بحيث يساوي طرفها الأيمن الصفر.

يتضح أن الطرف الأيمن لدالة الهدف، ومعادلات الشروط تؤدي مباشرة إلى الحل المبدئي، وهذه هي الحالة الدائمة عندما تتكون نقطة البداية من كل المتغيرات المتممة.

يمكن تلخيص المعلومات السابقة في صيغة جدولية كما في الجدول رقم (٢,٣).

الجدول رقم (٢,٣).

	الحل	s_2	s_1	x_2	x_1	Z	أساسي
المعادلة Z	0	0	0	-5	-4	1	Z
المعادلة s_1	10	0	1	7	3	0	s_1
المعادلة s_2	3	1	0	1	2	0	s_2

البيانات المعروضة بالجدول تحدد المعلومات التالية:

يبين العمود الأساسي المتغيرات الأساسية الحالية s_1 و s_2 وقيمها معطاة بعمود الحل، وهذا يفرض ضمنياً أن المتغيرات غير الأساسية x_1 و x_2 (التي لم تظهر في العمود الأساسي) لها قيم صفرية.

قيمة دالة الهدف تكون:

$$Z = 4\,(0) + 5\,(0) + 0\,(10) + 0\,(3) = 0$$

كما هو موضح في عمود الحل.

بفحص المعادلة الهدفية صف المعادلة Z يمكن معرفة ما إذا كان الحل الحالي

أفضل أم لا ، لاحظنا أن لكلا المتغيرين الصفريين x_1 و x_2 معاملا سالبا وهذا يعني أن لها معاملات موجبة في دالة الهدف الأصلية . وحيث إننا نرغب في تكبير قيمة الدالة ، فإنه يمكن تحسين قيمة Z بزيادة قيم x_1 أو x_2 عن القيمة الصفرية . لذا نختار المتغير ذا المعامل الأكثر سالبية حيث إن الخبرات الحسابية توضح أن هذا الاختيار مفضل لكي نحصل على الحل الأمثل بسرعة .

تعتبر الملاحظة السابقة أساسية لما يسمى بشروط الأمثلية لطريقة السمبلكس ، وهي توضح أنه في حالة التكبير إذا كانت كل معاملات المتغيرات غير الأساسية موجبة في المعادلة Z من الجدول الحالي ، فإن الحل الحالي هو الحل الأمثل . وإن لم يكن كذلك فإن المتغير غير الأساسي الذي له المعامل الأكثر سالبية يختار كمتغير داخل .

بتطبيق شروط الأمثلية على جدول البدء (٢ , ٣) نختار المتغير x_2 كمتغير داخل . وعند هذه النقطة يكون المتغير الخارج أحد المتغيرَيْن الأساسيين s_1 و s_2 ، وهذا يتحقق باستخدام شروط القابلية (feasibility condition) التي تختار المتغير الخارج كأحد المتغيرات التي تصل إلى القيمة الصفرية عندما يصل المتغير x_2 إلى أكبر قيمة عند نقطة حدية مجاورة . بالطبع فإننا نود عمل هذا بدون استخدام الحل البياني ، علماً بأن الحل البياني يساعد في تطوير شروط القابلية جبرياً . اعتبر منطقة الحل للمثال (١ , ٢) الموضح في الشكل (٢ , ٤) .

تساوي أكبر قيمة للمتغير x_2 أصغر مقطع موجب للشرط مع المحور x_2 جبرياً . كل من هذه المقاطع تساوي نسبة الطرف الأيمن للشرط إلى المعامل الموجب للمتغير الداخل . فإذا كان معامل x_2 صفرا أو سالبا ، فهو لا يقطع الاتجاه الموجب للمحور x_2 . ومن ناحية أخرى ، فإن نقطة تقاطع الشرط (١) والشرط (٢) مع المحور x_2 هي : $x_2 = \frac{10}{7} \quad , \quad x_2 = 3$.

لهذا فإن x_2 تصل إلى أقصى قيمة وهي $\frac{10}{7}$ عند B، وعند هذه النقطة سوف يكون s_1 هو المتغير الخارج.

يمكن تحديد النسبة المعرفة سابقاً، والمتغير الخارج مباشرة من جدول السمبلكس. نعين أولاً العمود تحت المتغير الداخل x_2 ثم نأخذ نسبة عناصر الطرف الأيمن لمعادلات القيود إلى العناصر المناظرة في عمود المتغير الداخل (شريطة ألا يكون مقام النسبة سالباً أو صفراً) ولا تحسب نسبة للمعادلة الهدفية، ويكون المتغير الخارج هو المتغير الأساسي المواجه لأصغر نسبة بين هذه النسب.

جدول البدء (٣, ٢) للمثال (١, ٢) مكرر في الجدول (٤, ٢) بعد حساب النسب وتعيين المتغير الخارج. من أجل حساب التكرار التالي نحدد العمود أسفل المتغير الداخل ويسمى بالعمود الداخل (entering column) والصف المتعلق بالمتغير الخارج يسمى بالمعادلة المحورية (pivotal equation)، والعنصر الذي يقع في تقاطع المعادلة المحورية والعمود الداخل يسمى العنصر المحوري (pivot element).

الجدول رقم (٤, ٢).

العمود الداخل ↓ (x_2)

الأساس	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	الحل	النسبة
Z	1	-4	-5	0	0	0	
s_1 ← المعادلة المحورية		3	[7]	1	0	10	10/7
s_2		2	1	0	1	3	3/1

العنصر المحوري: [7]

بعد تعيين المتغير الداخل والمتغير الخارج، نحسب عناصر التكرار التالي باستخدام طريقة جاوس جوردان (Gauss - Jordan)، وفقاً للقاعدتين التاليتين:

١- قاعدة المعادلة المحورية:

المعادلة المحورية الجديدة = المعادلة المحورية القديمة ÷ العنصر المحوري

٢- قاعدة المعادلات الأخرى بالإضافة للمعادلة Z:

المعادلة الجديدة =

المعادلة القديمة − (معاملها في العمود الداخل) × (المعادلة المحورية الجديدة).

يجعل النوع الأول من الحسابات العنصر المحوري يساوي واحدا في المعادلة المحورية، بينما يجعل النوع الثاني من الحسابات جميع العناصر الأخرى في العمود الداخل مساوية للصفر، وهذا بالضرورة مكافئ للحل من أجل الحل الأساسي الجديد بالتعويض خارج المتغير الداخل في كل المعادلة المحورية.

بتطبيق القاعدة الأولى على الجدول المبدئي، نقسم المعادلة - s_1 على العنصر المحوري 7، وحيث إن x_2 تأخذ مكان s_1 في العمود الأساسي، فإن النوع الأول يؤدي إلى التغييرات التالية في جدول البدء نلاحظ أن عمود

الجدول رقم (٥, ٢).

الأساسي	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	الحل
Z						
x_2	0	3/ 7	1	1/ 7	0	10/ 7
s_2						

بعد تعيين المتغير الداخل والمتغير الخارج، نحسب عناصر التكرار التالي باستخدام طريقة جاوس جوردان (Gauss - Jordan)، وفقاً للقاعدتين التاليتين:

١- قاعدة المعادلة المحورية:

المعادلة المحورية الجديدة = المعادلة المحورية القديمة ÷ العنصر المحوري

٢- قاعدة المعادلات الأخرى بالإضافة للمعادلة Z:

المعادلة الجديدة =

المعادلة القديمة - (معاملها في العمود الداخل) × (المعادلة المحورية الجديدة).

يجعل النوع الأول من الحسابات العنصر المحوري يساوي واحدا في المعادلة المحورية، بينما يجعل النوع الثاني من الحسابات جميع العناصر الأخرى في العمود الداخل مساوية للصفر، وهذا بالضرورة مكافئ للحل من أجل الحل الأساسي الجديد بالتعويض خارج المتغير الداخل في كل المعادلة المحورية.

بتطبيق القاعدة الأولى على الجدول المبدئي، نقسم المعادلة - s_1 على العنصر المحوري 7، وحيث إن x_2 تأخذ مكان s_1 في العمود الأساسي، فإن النوع الأول يؤدي إلى التغييرات التالية في جدول البدء نلاحظ أن عمود

الجدول رقم (٥,٢).

الأساسي	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	الحل
Z						
x_2	0	3/7	1	1/7	0	10/7
s_2						

أدى الحل إلى قيمة جديدة $\left(x_2 = \frac{10}{7}\right)$ والذي يساوي النسبة الصغرى من شروط القابلية (feasibility condition). لتكملة الجدول ننفذ الحسابات وفقاً للقاعدة الثانية:

١- المعادلة -Z

المعادلة القديمة : $(1 \quad -4 \quad -5 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$

المعادلة المحورية الجديدة : $- (-5) \times \left(0 \quad \frac{15}{7} \quad 5 \quad \frac{5}{7} \quad 0 \quad \frac{50}{7} \right)$

المعادلة -Z الجديدة : $= \left(1 \quad \frac{-13}{7} \quad 0 \quad \frac{5}{7} \quad 0 \quad \frac{50}{7} \right)$

٢- المعادلة s_2

المعادلة s_2 القديمة : $(0 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 3)$

المعادلة المحورية الجديدة : $- (1) \times \left(0 \quad -\frac{3}{7} \quad -1 \quad -\frac{1}{7} \quad 0 \quad -\frac{10}{7} \right)$

المعادلة s_2 الجديدة : $= \left(0 \quad \frac{11}{7} \quad 0 \quad -\frac{1}{7} \quad 1 \quad \frac{11}{7} \right)$

ويكون الجدول الجديد الكامل هو الجدول رقم (٦ , ٢).

الجدول رقم (٦ , ٢).

الأساسي	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	الحل	النسبة
Z	1	- 13/ 7	0	5/ 7	0	50/ 7	
x_2	0	3/ 7	1	1/ 7	0	10/ 7	$\left(\frac{10}{7}\right)/\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{10}{3}$
s_2	0	11/ 7	0	-1/ 7	1	11/ 7	$\left(\frac{11}{7}\right)/\left(\frac{11}{7}\right) = 1$

أدى الحل إلى قيمة جديدة $\left(x_2 = \frac{10}{7}\right)$ والذي يساوي النسبة الصغرى من شروط القابلية (feasibility condition). لتكملة الجدول ننفذ الحسابات وفقاً للقاعدة الثانية:

١- المعادلة -Z

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$: المعادلة القديمة

$$- (-5) \times \begin{pmatrix} 0 & \frac{15}{7} & 5 & \frac{5}{7} & 0 & \frac{50}{7} \end{pmatrix}$$: المعادلة المحورية الجديدة

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{-13}{7} & 0 & \frac{5}{7} & 0 & \frac{50}{7} \end{pmatrix}$$: المعادلة -Z الجديدة

٢- المعادلة s_2

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$: المعادلة s_2 القديمة

$$- (1) \times \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{7} & -1 & -\frac{1}{7} & 0 & -\frac{10}{7} \end{pmatrix}$$: المعادلة المحورية الجديدة

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{11}{7} & 0 & -\frac{1}{7} & 1 & \frac{11}{7} \end{pmatrix}$$: المعادلة s_2 الجديدة

ويكون الجدول الجديد الكامل هو الجدول رقم (٦ , ٢).

الجدول رقم (٦ , ٢).

الأساسي	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	الحل	النسبة
Z	1	- 13/ 7	0	5/ 7	0	50/ 7	
x_2	0	3/ 7	1	1/ 7	0	10/ 7	$\left(\frac{10}{7}\right)/\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{10}{3}$
s_2	0	11/ 7	0	-1/ 7	1	11/ 7	$\left(\frac{11}{7}\right)/\left(\frac{11}{7}\right) = 1$

نلاحظ في الحل الجديد أن $x_1 = 0 \ , \ x_2 = \frac{10}{7}$ (وهو النقطة B في الشكل(٥ , ٢)) وأن قيمة الدالة ازدادت من صفر إلى $\frac{50}{7}$. نلاحظ كذلك أن الجدول (٦ , ٢) له نفس خواص الجدول السابق. ومن شروط القابلية نجد أن x_1 هو المتغير الداخل و s_2 هو المتغير الخارج.

سوف تؤدي عمليات جاوس جوردان التالية إلى الجدول الجديد:

(أ) المعادلة s_2 المحورية الجديدة = معادلة s_2 القديمة ÷ $\frac{11}{7}$.

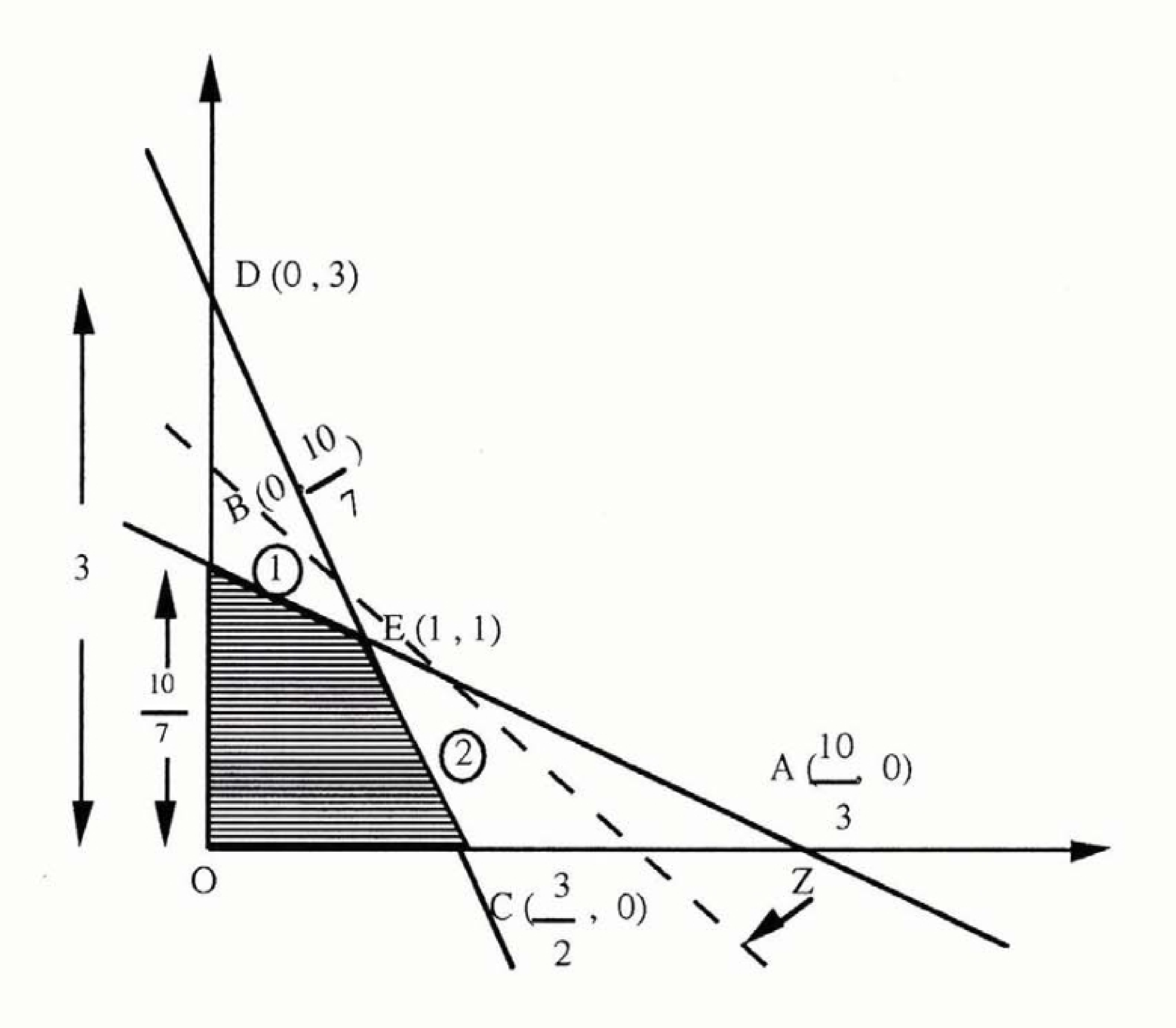
(ب) المعادلة -Z الجديدة = معادلة Z القديمة − × $\left(\frac{-13}{7}\right)$ × المعادلة المحورية الجديدة.

(جـ) المعادلة − x_2 الجديدة = معادلة x_2 القديمة − $\left(\frac{3}{7}\right)$ × المعادلة المحورية الجديدة.

بإجراء الحسابات نحصل على الجدول رقم (٧ , ٢).

الجدول رقم (٧ , ٢).

أساسي	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	الحل
Z	1	0	0	- 42 / 77	13/11	9
x_2	0	0	1	14 / 77	- 21/77	1
x_1	0	1	0	- 1 / 11	7/11	1



كل رقم (٥ , ٢).

من الحل نجد أن $x_2 = 1$, $x_1 = 1$ وهي النقطة E في الشكل (٥ , ٢) ونجد قيمة دالة الهدف من الجدول رقم (٧ , ٢) الذي يعتبر الجدول الأخير الأمثل لأن معاملات جميع المتغيرات الأساسية موجبة.

تم توضيح طريقة السمبلكس بمسألة تكبير، أما في حالة مسائل التصغير، فيكون المطلوب فقط تغيير شروط الأمثلية بحيث يكون للمتغير الداخل المعامل الأكبر إيجابية في المعادلة -Z وتكون شروط القابلية غير مختلفة بالنسبة لكل من التصغير والتكبير ويمكن تلخيص ذلك في شرطين مهمين كما يلي:

شروط الأمثلية: شرط الأمثلية (Optimality condition) هو أن يكون المتغير الداخل في التكبير (تصغير) متغيرا غير أساسي له المعامل الأكثر سالبية (إيجابية) في المعادلة -Z. ويكون الحل أمثل عندما تكون معاملات المتغيرات غير الأساسية في المعادلة -Z غير سالبة (غير موجبة).

شرط القابلية: ينص شرط القابلية (feasibility condition) ، في مسائل التكبير والتصغير ، على أن يكون المتغير الخارج هو متغيرا أساسيا له أصغر نسبة (بمقام موجب).

مثال (٣, ٢)

باستخدام طريقة السمبلكس أوجد أكبر قيمة للدالة :

$$Z = x_1 + 2x_2$$

تحت القيود :

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 < 8$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1 , \quad x_2 \geq 0$$

الحل

توضع المسألة في الصيغة القياسية كالتالي :

كبر الدالة :

$$Z = x_1 + 2x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

تحت القيود :

$$x_1 + 2x_2 + s_1 = 6$$

$$2x_1 + x_2 + s_2 = 8$$

$$-x_1 + x_2 + s_3 = 1$$

$$x_2 + s_4 = 2$$

$$x_1 , x_2 , s_1 , s_2 , s_3 , s_4 \geq 0$$

نعبرعن دالة الهدف و كل قيود الصيغة القياسية كما يلي :

$$Z - 4x_1 - 2x_2 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + s_1 = 6$$

$$2x_1 + x_2 + s_2 = 8$$

$$-x_1 + x_2 + s_3 = 1$$

$$x_2 + s_4 = 2$$

نحدد الحل الأساسي المبدئي من معادلات القيود بوضع اثنين $(4 - 6 = 2)$ من المتغيرات بقيم صفرية شريطة أن يكون الحل الناتج وحيدا ومقبولا . واضح أنه بوضع $x_1 = x_2 = 0$ نحصل على $s_1 = 6$, $s_2 = 8$, $s_3 = 1$, $s_4 = 2$ ، ولهذا يمكن استخدام هذه النقطة كنقطة حل مبدئي أساسي ممكن، وتكون القيمة المناظرة لدالة

الهدف Z هي الصفر. ويؤدي الطرف الأيمن لدالة الهدف ومعادلات القيود مباشرة إلى الحل المبدئي.

يمكن تلخيص المعلومات السابقة في صيغة جدولية كما في الجدول (٢,٨).

الجدول رقم (٢,٨).

الأساسي	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	الحل	
Z	1	-3	-2	0	0	0	0	0	المعادلة -Z
s_1		1	2	1	0	0	0	6	المعادلة - s_1
s_2		2	1	0	1	0	0	8	المعادلة - s_2
s_3		-1	1	0	0	1	0	1	المعادلة - s_3
s_4		0	1	0	0	0	1	2	المعادلة - s_4

نلاحظ أن المتغيرين الصفريين x_1 و x_2 كليهما له متغيرات سالبة تعني أن لها معاملات موجبة في دالة الهدف الأصلية. وحيث إننا نرغب في تكبير قيمة الدالة، فإنه يمكن تحسين قيمة Z بزيادة قيم x_1 أو x_2 عن القيمة الصفرية.

لذا يختار المتغير ذو المعامل الأكثر سالبية، ولذلك نختار المتغير x_1، كمتغير داخل ولتحديد المتغير الخارج، نعين أولاً العمود تحت المتغير الداخل x_1 ثم نلغي كل العناصر السالبة والصفر في معادلات الشروط، ثم نأخذ نسبة عناصر الطرف الأيمن لمعادلات الشروط، ويستثنى منها المعادلات ذات العناصر الملغية في العمود الداخل وكذلك المعادلة الهدفية. وهذا موضح بالجدول رقم (٩ , ٢).

الجدول رقم (٢,٩).

العمود الداخل

الأساس	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	الحل	
Z	1	-3	-2	0	0	0	0	0	النسبة
s_1	0	1	2	1	0	0	0	6	6/1 = 6
s_2	0	2	1	0	1	0	0	8	8/2 = 4
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1	—
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2	—

المعادلة المحورية ← s_2

العنصر المحوري (2)

وللحصول على المعادلة المحورية الجديدة، نقسم جميع عناصر المحورية القديمة على العنصر المحوري كما هو موضح بالجدول رقم (٢,١٠). نلاحظ أن قيمة x_1 تغيرت من $x_1 = 0$ إلى $x_1 = 4$ في عمود الحل.

الجدول رقم (٢,١٠).

الأساسي	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	الحل
Z								
s_1								
x_1	0	1	1/2	0	1/2	0	0	8/2 = 4
s_3								
s_4								

ولتكملة الجدول نجري الحسابات التالية :

١- المعادلة -Z

المعادلة القديمة : $\left(1 \quad -3 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\right)$

المعادلة المحورية الجديدة : $-(-3) \times \left(0 \quad 3 \quad \frac{3}{2} \quad 0 \quad \frac{3}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 12\right)$

المعادلة الجديدة : $= \left(1 \quad 0 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{3}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 12\right)$

٢- المعادلة -s_1

المعادلة القديمة : $\left(0 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 6\right)$

المعادلة المحورية الجديدة : $-(1) \times \left(0 \quad -1 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad -4\right)$

المعادلة الجديدة : $= \left(0 \quad 0 \quad \frac{3}{2} \quad 1 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 2\right)$

٣- المعادلة -s_3

المعادلة القديمة : $\left(0 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1\right)$

المعادلة المحورية الجديدة : $-(1) \times \left(0 \quad -1 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 4\right)$

المعادلة الجديدة : $= \left(0 \quad 0 \quad \frac{3}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad 0 \quad 5\right)$

٤- المعادلة -s_4

المعادلة الجديدة هي نفس المعادلة -s_4 القديمة لأن معاملها في العمود الداخل يساوي صفرا .

الجدول الكامل موضح بالجدول رقم (٢,١١). يعطي الحل الجديد $x_1 = 4$ ، $x_2 = 0$ كما أن قيمة Z ازدادت من صفر إلى 12 وهذه الزيادة حدثت بسبب زيادة في المتغير x_1 من صفر إلى 4

الجدول رقم (٢,١١).

أساس	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	الحل	
Z	1	0	- 1/2	0	3/2	0	0	12	النسبة
s_1	0	0	3/2	1	- 1/2	0	0	2	$\frac{2}{3/2}=\left(\frac{4}{3}\right)$
x_1	0	1	1/2	0	1/2	0	0	4	$\frac{4}{1/2}=8$
s_3	0	0	3/2	0	1/2	1	0	5	$\frac{5}{3/2}=\frac{10}{3}$
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2	$\frac{2}{1}=2$

حيث إن كل زيادة في x_1 تزيد Z بمقدار 3 وعلى ذلك تكون الزيادة الكلية في Z هي 3 $\times$ 4 = 12 ، من الجدول رقم (٢,١١) يتضح أن المتغير الداخل هو x_2 ، والمتغير الخارج هو s_1 ، وتكون المعادلة -s_1 هي المعادلة المحورية.

وللحصول على الحل الجديد نجري الحسابات التالية لتكوين الجدول (٢,١٢):

١- المعادلة المحورية الجديدة (s_1) = المعادلة -s_1 $\div \left(\frac{3}{2}\right)$.

٢- المعادلة -Z الجديدة = المعادلة -Z القديمة - $\left(-\frac{1}{2}\right)$ × المعادلة المحورية الجديدة

٣- المعادلة -x_1 الجديدة = المعادلة -x_1 القديمة - $\left(\frac{1}{2}\right)$ × المعادلة المحورية الجديدة

٤- المعادلة -s_3 الجديدة = المعادلة s_3 القديمة - $\left(\frac{3}{2}\right)$ × المعادلة المحورية الجديدة

٥- المعادلة -s_4 الجديدة = المعادلة -s_4 القديمة - (1) × المعادلة المحورية الجديدة .

الجدول رقم (٢, ١٢).

الأساس	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	الحل
Z	1	0	0	1/3	4/3	0	0	$12\frac{2}{3}$
x_2	0	0	1	2/3	- 1/3	0	0	$\frac{4}{3}$
x_1	0	1	0	- 1/3	2/3	0	0	$\frac{10}{3}$
s_3	0	0	0	-1	1	1	0	3
s_4	0	0	0	- 2/3	1/3	0	1	$\frac{2}{3}$

من الجدول رقم (٢, ١٢) نجد أن الحل هو $x_1 = \frac{10}{3}$ ، $x_2 = \frac{4}{3}$ ، $Z = 12\frac{2}{3}$.

يعد هذا الحل حلاً أمثل لعدم وجود أي متغير أساسي له معامل سالب في المعادلة -Z .

(٢, ٤) تمارين

١- استلمت شركة كيميائية طلباً للحصول على ١٤٠٠ كيلوجرام من خليط مكون من ثلاث مركبات حيث نبين نوع المركب وكلفته كما في الجدول رقم (٢, ١٣):

الجدول رقم (١٣ , ٢).

المركب	الكلفة بالريال لكل كيلوجرام
الأول	2
الثاني	3
الثالث	4

يتضمن الطلب الشروط الآتية:

١- يجب أن يحتوي الخليط على ٢٠٠ كيلوجرام في الأقل من المركب الثاني.

٢- يجب ألا يحتوي الخليط على أكثر من ٤٠٠ كيلوجرام من المركب الأول.

٣- يجب أن يحتوي الخليط ١٥٠ كيلوجراما في الأقل من المركب الثالث، والمطلوب إيجاد ما يلي:

(أ) صياغة المسألة على شكل برمجة خطية

(ب) كتابة المسألة الثنائية المقابلة للصياغة في (أ).

(جـ) الحل الأمثل للمسألة والمسألة الثنائية.

٢- اكتب المسألة الثنائية للمسائل التالية، ثم أوجد حلها باستخدام الطريقة البيانية (إن أمكن ذلك) وكذلك بطريقة السمبلكس.

(أ) تكبير الدالة:

$$Z = -5x_1 + 2x_2$$

تحت القيود:

$$-x_1 + x_2 \le -3$$

$$2x_1 + 3x_2 \le 5$$

$$x_1 , \quad x_2 \ge 0$$

(ب) تصغير الدالة:

$$Z = 6x_1 + 3x_2$$

تحت القيود:

$$6x_1 - 3x_2 \geq 1$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 4$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

(جـ) تصغير الدالة:

$$Z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3$$

تحت القيود:

$$x_1 + x_2 \geq 10$$

$$x_1 , x_3 \geq 0$$

$$x_2 \leq 0$$

٣- أوجد حل المسألة الثنائية (المرافقة) للمسألة الآتية:

تكبير الدالة:

$$Z = 4x_1 + 6x_2 + 7x_3$$

تحت القيود:

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 36$$

$$10x_1 - 8x_2 + 4x_3 \leq 24$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 6$$

$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

٤- باستخدام الطريقة البيانية وطريقة السمبلكس، أوجد حل المسائل التالية:

(أ) تكبير دالة الهدف:

$$Z = x_1 + x_2$$

تحت القيود:

$$x_1 + 5x_2 \leq 5$$

$$2x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 \ , \ x_2 \geq 0$$

(ب) تكبيردالة الهدف:

$$Z = 3x_1 + 4x_2$$

تحت القيود:

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$x_1 \ , \ x_2 \geq 0$$

(جـ) تصغيرالدالة:

$$Z = x_1 + 2x_2$$

تحت القيود:

$$x_1 + 3x_2 \geq 11$$

$$2x_1 + x_2 \geq 9$$

$$x_1 \ , \ -x_2 \geq 0$$

(د) تكبيرالدالة:

$$Z = x_1 + 2x_2$$

تحت القيود :

$$x_1 + 3x_2 \geq 11$$

$$2x_1 + x_2 \geq 9$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

٥- اعتبر مسألة البرمجة الخطية التالية :

إيجاد النهاية الكبرى لدالة الهدف

$$Z = 10x_1 + 24x_2$$

وذلك تحت القيود :

$$3x_1 + 5x_2 \leq 60$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 48$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 24$$

$$x_1 \geq 0 , x_2 \geq 0$$

(أ) باستخدام الطريقة البيانية أوجد الحل الأمثل لهذه المسألة .

(ب) باستخدام طريقة السمبلكس أوجد الحل الأمثل لهذه المسألة .

٦- باستخدام طريقة السمبلكس أوجد النهاية الكبرى لدالة الهدف التالية :

$$Z = 8x_1 + 7x_2 + 5x_3$$

وذلك تحت القيود :

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 36$$

$$10x_1 - 6x_2 + 4x_3 \leq 24$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 6$$

$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$



الفصل الثالث

البرمجة غير الخطية ذات المتغير الواحد

- مقدمة • البحث الخطي بدون استخدام المشتقات
- البحث الخطي باستخدام المشتقات • تمارين

(٣,١) مقدمة

تُعنى مسائل البرمجة غير المقيدة بمتغير واحد بإيجاد الحل الأمثل للدالة :

$$Z = f(x) \qquad (٣,١)$$

حيث $f(x)$ دالة (غير خطية) في المتغير المفرد x ، ويكون البحث عن الأمثلية في هذه الحالة مكافئاً لإيجاد قيمة x في الفترة غير المحدودة $(-\infty , \infty)$ التي تجعل Z أكبر (أصغر) ما يمكن. و إذا كان البحث مقيدا في فترة محدودة أقل، مثل المجال $[a , b]$ فإن المسألة تصبح عبارة عن إيجاد الأمثلية للدالة :

$$\begin{cases} Z = f(x) & \text{أمثلية} \\ a \leq x \leq b & \text{تحت الشرط} \end{cases} \qquad (٣,٢)$$

ويعرف البحث عن النقطة المثلى بالبحث الخطي، و يعتبر بمثابة العمود الفقري لحل مسائل البرمجة غير الخطيةالمتعددة المتغيرات. وتصنف طرق البحث الخطي الى قسمين رئيسين هما:

(أ) البحث الخطي بدون استخدام المشتقات

(ب) البحث الخطي باستخدام المشتقات

وسندرس طرقا للبحث الخطي لهذين القسمين في البندين التاليين.

(٢,٣) البحث الخطي بدون استخدام المشتقات

يكون تحديد الأمثلية - من الناحية العملية - باستخدام التفاضل والتكامل غير مثمر أحياناً وذلك لأن الدالة الهدفية قد تكون غير معروفة في صورة رياضية؛ وبذلك يكون التفاضل مستحيلا، أو أن يكون الحصول على النقطة الساكنة جبريا صعباً أو مستحيلاً. في مثل هذه الحالات، نستخدم الطرق العددية لتقريب مكان الأمثلية المحلية في حدود درجة دقة مقبولة.

تبدأ أساليب البحث الخطي التتابعي بفترة محدودة، ويفترض أن تكون فيها الدالة الهدفية أحادية المنوال، يتم تقليص هذه الفترة بانتظام حول القيمة المثلى المحلية، حتى تنحصر القيمة المثلى داخل حدود مقبولة. يتأثر هذا التقليص بالتقييم المتتابع للدالة الهدفية عند نقط مختارة. يتم في ذلك استخدام خاصية المنوال الأحادي لحذف أجزاء من الفترة الحالية. سوف نناقش فيما يلي بعض الطرق ومنها بحث فيبوناتشي (Fibonacci) وبحث الفترة الذهبية.

تعريف: الدالة أحادية المنوال

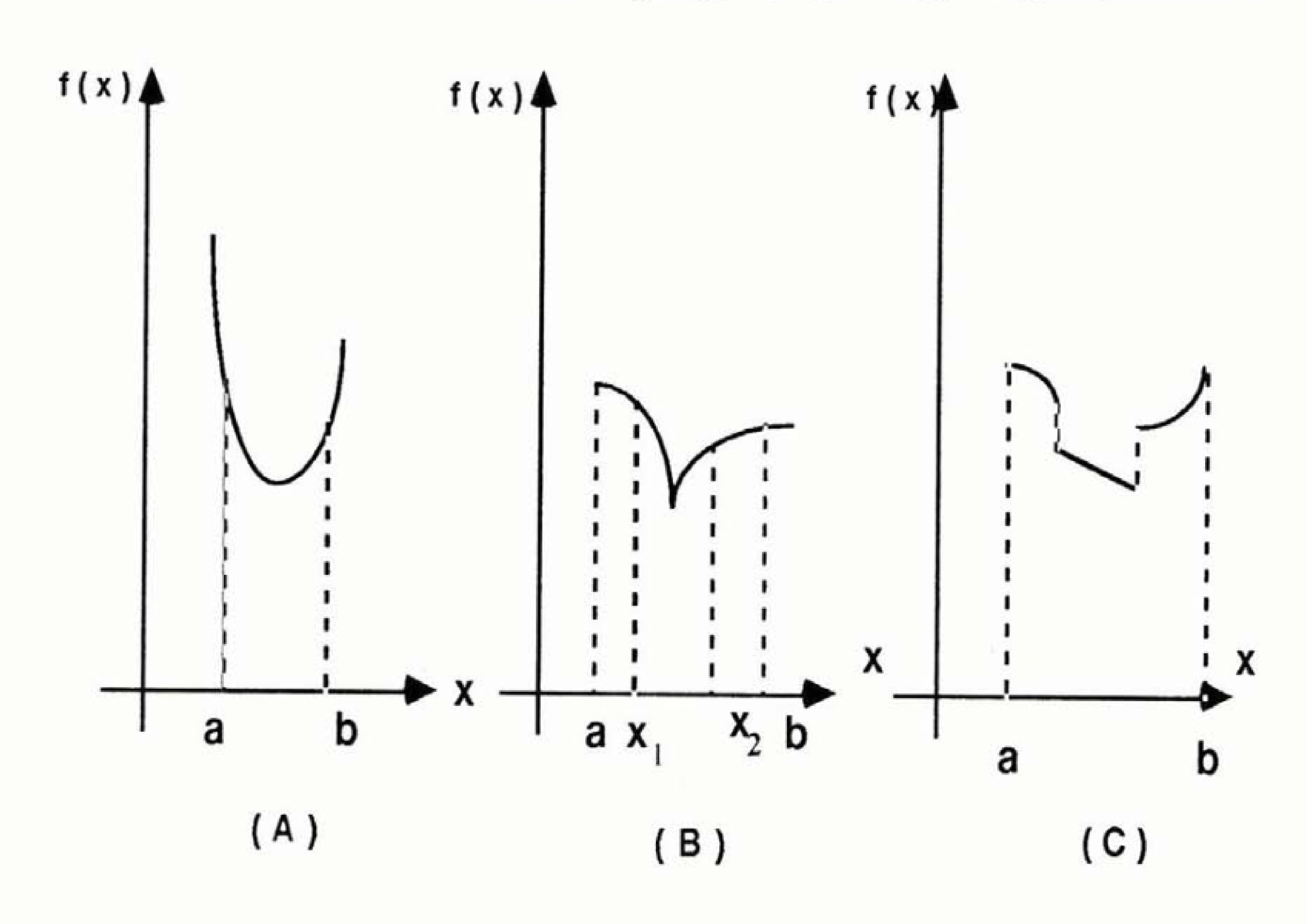
تكون الدالة $f(x)$ أحادية المنوال (unimodal) عند النقطة x^* إذا تحقق الشرطان التاليان لأي $x_1 < x_2$ بحيث $f(x_1) \neq f(x^*)$ و $f(x_2) \neq f(x^*)$.

(i) $x_2 < x^*$ تـؤدي الى أن $f(x_2) < f(x_1)$.

(ii) $x_1 > x^*$ تـؤدي الى أن $f(x_1) < f(x_2)$.

حيث x^* هي النقطة المثلى (نهاية صغرى) و $x_2 > x_1$، وتقعان في نطاق تعريف الدالة $f(x)$.

بعض الأمثلة للدالة أحادية المنوال موضحة في الشكل (١ , ٣). قد تكون الدالة أحادية المنوال غير تفاضلية وحتى غير متصلة.



الشكل رقم (١ , ٣). الدالة أحادية المنوال.

بحث فيبوناتشي

يُستخدم بحث فيبوناتشي لتصغير دالة أحادية المنوال معرفة على فترة محدودة

ومغلقة بحيث يعطي تتابع فيبوناتشي (Fibonacci sequence) للبحث الخطي بالمعادلة:

$$\left.\begin{array}{ll} F_{r+1} = F_r + F_{r-1}, & r=1,2,3,.... \\ F_0 = F_1 = 1 & \end{array}\right\} \quad (٣,٣)$$

أي أن:

$$\{F_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...\} \quad (٣,٤)$$

ويعتبر أحد أكفأ أساليب البحث التتابعي، ويتم الحصول على كل عدد في التتابع $\{F_n\}$ بإضافة العددين السابقين باستثناء العددين الأولين F_1 ، F_0 اللذين يساوي كل واحد منهما واحدا.

عند التكرار K للبحث نفترض أن تكون فترة الشك (uncertainty) أو عدم التيقن هي $[a_k , b_k]$ باعتبار النقطتين y_k و x_k المعرفتين بالمعادلتين التاليتين:

$$x_k = a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k), \quad k=1, 2, 3, . . ., n-1 \quad (٣,٥)$$

$$y_k = a_k + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k), \quad k=1, 2, 3, . . ., n-1 \quad (٣,٦)$$

حيث n هو العدد المحدد الكلي مسبقاً لعدد المرات لحساب الدالة.

فترة عدم التأكد $[a_{k+1} , b_{k+1}]$ تعطى بالفترة $[x_k , b_k]$ إذا كانت $f(x_k) > f(y_k)$ كما تعطى بالفترة $[a_k , y_k]$، إذا كانت $f(x_k) \leq f(y_k)$.

في الحالة الأولى، وباعتبار المعادلة (٣,٣) وإستخدام المعادلة (٣,٥) مع أخذ $r= n-k$ فإن:

$$b_{k+1} - a_{k+1} = b_k - x_k = b_k - a_k - \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k)$$

$$= \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k) \quad (٣,٧)$$

في الحالة الثانية، وباستخدام (٣,٦) يمكن استنتاج أن:

$$b_{k+1} - a_{k+1} = y_k - a_k = \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}} (b_k - a_k) \qquad (٣,٨)$$

ومن ذلك نلاحظ أنه في أي من الحالتين تنقص فترة الشك بمعامل $\frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}$.

اختيار عدد التكرارات

من المعـادلتين (٣,٥) و (٣,٦) نلاحظ اعـتـمـاد x_k , y_k على عـدد التكرارات n. ومن المعادلتين (٣,٧) و (٣,٨) نلاحظ أن طول فترة الشك ينقص عند التكرار k بمعامل $\frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}$ ، وبالتالي فإنه عند نهاية التكرار $n - 1$ حيث n هو عدد الملاحظات التي تم إجراؤها وطول فترة الشك تم إنقاصها من $b_1 - a_1$ إلى $b_n - a_n = \frac{(b_1 - a_1)}{F_n}$ فإن n يجب أن تُختار بحيث تمثّل $\frac{(b_1 - a_1)}{F_n}$ درجة الدقة المطلوبة.

ملخص لطريقة حساب بحث فيبوناتشي

سوف نناقش هنا ملخصا لطريقة بحث فيبوناتشي لتصغير دالة أحادية المنوال على الفترة $[a_1 , b_1]$

(أ) خطوة البدء

نختار الطول المسموح به لفترة عدم التأكد النهائية $\ell > 0$ تقع خلالها النقطة المثلى، وكذلك مقدار صغير $\varepsilon > 0$. ونفرض أن $[a_1 , b_1]$ في فترة عدم التأكد الابتدائية وباختيار عدد التكـرارات n تختار بحيث إن $F_n > \frac{(b_1 - a_1)}{\ell}$.

نحسب:

$$x_1 = a_1 + \frac{F_{n-2}}{F_n}(b_1 - a_1)$$

و

$$y_1 = a_1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}(b_1 - a_1)$$

احسب $f(x_k)$ و $f(y_k)$ ضع $k = 1$ ثم نفذ الخطوة الرئيسية.

ب) الخطوة الرئيسة

١- إذا كانت $f(x_k) > f(y_k)$ فانتقل إلى الخطوة ٢، وإذا كانت $f(x_k) \leq f(y_k)$ فانتقل إلى الخطوة ٣.

٢- اعتبر $a_{k+1} = x_k$ و $b_{k+1} = b_k$. كذلك ضع:

$$y_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k}}(b_{k+1} - a_{k+1}) \text{ و } x_{k+1} = y_k$$

إذا كانت $k = n - 2$ إذهب إلى خطوة ٥ وإذا كانت $k < n - 2$ إحسب $F(x_{k+1})$ ثم إذهب إلى خطوة ٤.

٣- ضع $a_{k+1} = a_k$ و $b_{k+1} = y_k$، وكذلك ضع

$$x_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}}(b_{k+1} - a_{k+1}) \text{ و } y_{k+1} = x_k$$

إذا كانت $k = n - 2$ فانتقل الى الخطوة رقم ٥ أما إذا كانت $k < n - 2$ احسب $f(x_{k+1})$ وانتقل إلى خطوة ٤.

٤- ضع $k = k + 1$ وانتقل الى الخطوة رقم ١.

٥- ضع $x_n = x_{n-1}$ و $y_n = x_{n-1} + \varepsilon$ إذا كانت $f(x_n) > f(y_n)$ ضع $a_n = x_n$ و $b_n = b_{n-1}$. أما إذا كانت $f(x_n) \leq f(y_n)$

فضع $a_n = a_{n-1}$ و $b_n = x_n$ ثم توقف. عندئذ نجد الحل الأمثل في الفترة $[a_n , b_n]$

مثال (١ , ٣)

أوجد أصغر قيمة للدالة :

$$f(x) = x^2 + 2x$$

تحت الشرط :

$$-3 \le x \le 5$$

الحل

من الواضح أن الدالة $f(x)$ أحادية المنوال والنقطة المثلى هي $x^* = -1$ سوف ننقص فترة البداية الى فترة طولها على الأكثر 0.2 لذلك فإن $F_n > \frac{8}{0.2} = 40$ ومن هذه العلاقة نجد أن $n = 9$ ونختار $\varepsilon = 0.01$.

تقع الملاحظتان الأولتان عند النقطتين :

$$x_1 = -3 + \frac{F_7}{F_9}(8) = 0.054545$$

$$y_1 = -3 + \frac{F_8}{F_9}(8) = 1.945454$$

نلاحظ أن $f(x_{1k}) \le f(x_{2k})$ ، لذا فإن الفترة الجديدة تكون $[-3.0000 , 1.945454]$. تكرر هذه العملية عدة مرات والحسابات معطاه بالجدول رقم (١ , ٣). لاحظ أنه عند $k = 8$ فإن :

$$x_k = y_k = -0.963639$$

وحيث إن $f(x_{1k}) \le f(x_{2k})$ و $x_{2k} = a_{1k} + \varepsilon = -0.953639$ تكون الفترة النهائية $[a_9 , b_9]$ هي $[-1.109091 , -0.953636]$، وطولها $\ell = 0.155455$

الجدول رقم (١,٣).

التكرار k	a_k	b_k	x_k	y_k	$f(x_k)$	$f(y_k)$
1	-3.000000	5.000000	0.054545	1.945459	0.112065*	7.675699*
2	-3.000000	1.945454	-1.109091	0.054545	-0.988099*	0.112065
3	-3.000000	0.054545	-1.836363	-1.109091	-0.892892*	-0.988099
4	-1.836363	0.054545	-1.109091	-0.672727	-0.988099	-0.892892*
5	-1.836363	-0.672727	-1.399999	-1.109091	-0.840001*	-0.988099
6	-1.399999	-0.672727	-1.109091	-0.963636	-0.988099	-0.998677*
7	-1.109091	-0.672727	-0.963636	-0.818182	-0.998677	-0.966942*
8	-1.109091	-0.818182	-0.963636	-0.963636	-0.998677	-0.998677
9	-1.109091	-0.963636	-0.963636	-0.953636	-0.998677	-0.997850*

يشار لقيم الدالة المحسوبة بعلامة *

مثال (٢,٣)

أوجد القيمة الكبرى للدالة :

$$f(x) = e^{x} - 2x^{2}$$

في الفترة $[0 , 1]$ مع طول فترة نهائية $\ell \leq 0.05$

الحل

الدالة $f(x)$ أحادية المنوال في الفترة $[0 , 1]$ ولإيجاد عدد التكرارات n نحسب $F_n < \frac{1}{0.05}$ فتكون $n = 7$ ونفترض $\varepsilon = 0.001$. تقع الملاحظتين الأولتين عند النقطتين :

$$x_k = 0 + \frac{F_5}{F_7}(1) = \frac{8}{21} = 0.380952$$

$$y_k = 0 + \frac{F_6}{F_7}(1) = \frac{13}{21} = 0.619048$$

نلاحظ أن $f(x_k) > f(y_k)$ ، لذا فإن الفترة الجديدة تكون [0,0.619048] تكرر هذه العملية عدة مرات والحسابات معطاة بالجدول (٢ , ٣) وتكون الفترة النهائية هي [0.361905 , 0.3904763] وطولها $\ell' = 0.018561$ أي أن $L > \ell'$.
ومن الجدول رقم (٢ , ٣) نجد أن $x^* = 0.361905$ وأن $f(x^*) = 1.174099$.

الجدول رقم (٢ , ٣).

التكرار k	a_k	b_k	x_k	y_k	$f(x_k)$	$f(y_k)$
1	0.000000	1.000000	0.380952	0.619048	1.173428	1.090718
2	0.000000	0.619048	0.238095	0.380952	1.155451	1.173428
3	0.238095	0.619048	0.380952	0.476162	1.173428	1.156415
4	0.238095	0.476191	0.333333	0.380952	1.173390	1.173428
5	0.333333	0.476191	0.380952	0.390476	1.173428	1.172741
6	0.333333	0.390476	0.361905	0.380952	1.174099	1.173428
7	0.361905	0.390476	0.361905	0.381952	1.174099	1.173367

بحث الفترة الذهبية

يعتمد بحث الفترة الذهبية على الحقيقة التالية :

$$r = \lim_{n \to \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0.618034$$

حيث إن F_n و F_{n+1} حدان متتاليان نحصل عليهما من متتابعة ڤيبونتشي المعطاة بالعلاقة (٣ , ٣) . في هذا البحث تنقص فترة الشك في كل خطوة بمقدار معامل ثابت r .

لاحظ أنه يمكن وبصفة عامة ، استخدام هذا البحث للدوال ذات المتغيرات المتصلة . يمكن إثبات أن r تحقق العلاقة :

$$r^2 + r - 1 = 0$$

نفترض أن الدالة $f(x)$ أحادية المنوال للمتغير المستمر X ومعرفة على الفترة المغلقة $[0, L_n]$.

تكون نقط الحساب لبحث الفترة الذهبية x_1, x_2 كما يلي:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= r^2 L_n, \\ x_2 &= r L_n. \end{aligned}\right\} \qquad (٣,٩)$$

لإيجاد المنوال على الفترة ننفذ الخطوات التالية

١- احسب $f(x_1)$ ، $f(x_2)$ حيث x_1, x_2 معطاة بالمعادلة (٩, ٣).

٢- إذا كانت $f(x_1) > f(x_2)$ ، احذف الفترة $[x_2, L_n]$ والفترة المتبقية طولها $r L_n$ وتكون إحدى نقط الحساب $x_1 = r(r L_n) = r^2 L_n$ والنقطة الأخرى $x_2 = r(r^2 L_n) = r^3 L_n$.

أما إذا كانت $f(x_2) > f(x_1)$ ، احذف الفترة $[x_1, L_n]$ ويكون طول الفترة الباقية هو $r L_n$ ، وتكون هتي إحدى نقط الحساب وذلك لأن:

$$L_n - x_1 = (1 - r^2) L_n = rL_n$$

و

$$x_2 - x_1 = (r - r^2) L_n = r^3 L_n = r^2 (r L_n)$$

ونقطة الحساب الأخرى هي:

$$x = x_1 + r(r L_n) = 2 r^2 L_n$$

٣- كرر الخطوتين ١ و ٢ للفترات المتتابعة الباقية ذات الأطوال $rL_n, r^2 L_n, r^3 L_n, \ldots$ حتى نحصل على الدقة المطلوبة لإيجاد x^*.

مثال (٣,٣)

أوجد القيمة الصغرى للدالة :

$$f(x) = x^2 + 2e^{-x}$$

بحيث لا يزيد الخطأ في x^* عن 0.02 .

الحل

حساب قيمة الدالة عند $x = 0, 1, 2$ هو:

$$f(0) = 2 \;,\quad f(1) = 1 + 2e^{-1} \;,\; f(2) = 4 + 2e^{-2}$$

لذلك نأخذ $[0 \;,\; 2]$ فترة بحث مبدئية، وسوف يتناقص هذا في النهاية إلى فترة طولها 0.02 والذي يتطلب عدد n خطوة .

الجدول رقم (٣,٣).

n	L_n	a	b	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$
10	2	0	2	0.763932	1.236068	1.515254	2.108913
9	1.236068	0	1.236068	0.472136	0.763932	1.470250	1.515254
8	0.763932	0	0.763932	0.291796	0.472136	1.578987	1.470250
7	0.472136	0.291796	0.763932	0.472136	0.583592	1.470250	1.456361
6	0.291796	0.472136	0.763932	0.583592	0.652476	1.456361	1.467234
5	0.180340	0.472136	0.652476	0.541020	0.583592	1.457011	1.456361
4	0.111456	0.541020	0.652476	0.583592	0.6099903	1.456361	1.458789
3	0.068884	0.541020	0.609903	0.567331	0.583592	1.455938	1.456361
2	0.042572	0.541020	0.583592	0.557281	0.567331	1.456091	1.455938
1	0.026311	0.557281	0.583592	0.567331	0.573542	1.455938	1.456002

حيث n هي أصغر عدد صحيح يحقق $2(0.618034)^n \leq 0.02$، وقيمة n في هذه الحالة هي n=10 . يحتوي الجدول رقم (٣,٣) على L_n ، طول فترة الشك

(uncertainty) في البداية ونهايتيها a , b حيث $(L_n = b - a)$ ونقطتى الحساب عند كل فترة ونلاحظ كذلك أن :

$$x_1 + x_2 = a + b$$

يوضح الجدول (٣,٣) أن x^* تقع في الفترة [0.557281 , 0.573542] بعد الخطوة n=1. ومن الجدول رقم (٣,٣) نجد أن أفضل قيمة للدالة f(x) عند النقطة $x = x^*$ بمراعاة الدقة المطلوبة هي $f(x_1) = f(0.567371) = 1.455938$ والقيمة المثلى الصحيحة إلى ست خانات عشرية فهي

$$x^* = 0.567143 \quad , \quad f(x^*) = 1.455938$$

مثال (٣,٤)

أوجد القيمة الكبرى للدالة $f(x) = x\,(5\pi - x)$ في الفترة [0,20] داخل $\varepsilon = 1$.

الحل

حيث إن [0 , 20] فترة بحث مبدئية، وهذا ينقص في النهاية إلى فترة طولها يساوي واحدا، فإن هذا يتطلب n خطوة حيث n تكون أصغر عدد صحيح يحقق $20\,(0.618034)^n \le 1$ وقيمة n في هذه الحالة هي n = 6 في البداية وتكون نهايتا الفترة a,b $(L_n = b - a)$ ونقطتي الحساب عند كل فترة هما x_1 , x_2 ونلاحظ كذلك أن $x_1 + x_2 = a + b$.

يتضح من الجدول رقم (٣,٤) أن x^* تقع في الفترة [7.213, 8.327] والنقطة الداخلية x = 7.639 تكون داخل $\varepsilon = 1$ لكل النقط الأخرى في الفترة لذلك نأخذها كموقع للحد الأقصى بمعنى أن $x^* = x = 7.639$.

الجدول رقم (٣,٤).

n	L_n	a	b	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$
6	20	0	20	7.639	12.366	61.681	41.460
5	12.360	0	12.360	4.721	7.639	51.899	61.687
4	7.638	4.721	12.360	7.639	9.442	61.687	59.222
3	4.721	4.721	9.442	6.524	7.639	59.960	61.687
2	2.918	6.524	9.442	7.639	8.327	61.687	61.520
1	1.803	6.524	8.327	7.213	7.638	61.317	61.639

وتكون قيمة الدالة عند هذه النقطة هي $z^* = f(x) = 61.687$.

(٣,٣) البحث الخطي باستخدام المشتقات

ناقشنا في البند (٣,٢) السابق طريقتين من طرق البحث الخطي التي تعتمد على حساب الدوال ونناقش في هذا البند طريقتين من الطرق التي تعتمد على حساب المشتقات ، وبفرض أن تكون الدوال تفاضلية

طريقة تنصيف الفترة

نفترض أننا نرغب في تصغير دالة تفاضلية f على فترة مغلقة ومحددة. عند التكرار k تكون فترة عدم التأكد $[a_k , b_k]$ وبفرض أن المشتقة $f'(x_k)$ معروفة، فسيكون لدينا الحالات الثلاث الممكنة الآتية :

١- إذا كانت $f'(x_k) = 0$ فهذا يعني أن x_k هي نقطة التصغير.

٢- إذا كانت $f'(x_k) > 0$ فإنه لقيم $x > x_k$ نحصل على $f'(x_k)(x - x_k) > 0$ وهذا يؤدي إلى أن $f(x) \geq f(x_k)$ ، أي أن نقطة التصغير تقع على شمال x_k وبالتالي فتكون فترة عدم التأكد الجديدة $[a_{k+1} , b_{k+1}]$ هي $[a_k , x_k]$.

٣- إذا كانت $f'(x_k) < 0$ فإنه لقيم $x < x_k$ نجد $f'(x_k)(x - x_k) > 0$

وبالتـالي فـإن $f(x) \geq f(x_k)$. أي أن نقطة التـصـغـيـر تقع على يمين x_k ، وعلى ذلك تكون فترة عدم التأكد الجديدة $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ هي $[\lambda_k, b_k]$.

يجب أن تُختار النقطة x_k في الفترة $[a_k, b_k]$ بحيث يصغر أكبر طول لفترة عـدم التـأكـد الجـديدة ، أي أن x_k يجب أن تصغّر أكبـر قـيمـة لكل من $x_k - a_k$ و $b_k - x_k$. لاحظ أن أفـضـل مـوضـع للنقطة x_k هو منتـصـف الفـتـرة ، أي أن $x_k = (a_k + b_k)/2$.

نلخص ما سبق في أنه عند أي تكرار k ، نحسب f' عند نقطة منتصف فترة عدم التأكد، وعلى أساس قيمة f' يمكن معرفة ما إذا كنا نتوقف عندها أو نعين فترة جديدة لبحث طولها يساوي نصف طول الفترة السابقة .

اختيار عدد التكرارات n

يلاحظ أن طول فـتـرة عـدم التـأكـد بعـد n من التكرارات تسـاوي $\left(\frac{1}{2}\right)^n (b_1 - a_1)$ ولذلك فـإن التكرار يؤدي إلى تقـارب النقطة المخـتـارة من النقطة الصغرى ، وبالتالي يتوقف اختبار قيمه على درجة الدقة المرغوب فيها . وبصفة خاصة إذا كان طول فترة التأكد النهائية محدده بالقيمة ℓ فإن n يجب أن تختار كأصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{\ell}{(b_1 - a_1)}$.

ملخص طريقة تنصيف الفترة

فيما يلي نقدم ملخصاً لطريقة تنصيف الفترة لتصغير دالة تفاضلية f على فترة محددة ومغلقة .

(أ) خطوة البدء

نفترض أن $[a_1 , b_1]$ هي فترة عدم التأكد المبدئية وأن ℓ هو طول الفترة النهائية المسموح بها. نفترض كذلك أن n أصغر عدد صحيح موجب بحيث أن $\left(\frac{1}{2}\right)^n \le \frac{\ell}{(b_1 - a_1)}$ نضع k=1 ثم ننتقل إلى الخطوة الرئيسة.

(ب) الخطوة الرئيسة

١- احسب $x_k = \frac{(a_k + b_k)}{2}$ ثم إحسب $f'(x_k)$ فإذا كانت $f'(x_k) = 0$ عندئذ توقف وتكون x_k هي الحل الأمثل أما إذا كانت $f'(x_k) > 0$ فانتقل إلى الخطوة ٢، وإذا كانت $f'(x_k) < 0$ فانتقل إلى الخطوة ٣.

٢- ضع $a_{k+1} = a_k$ و $b_{k+1} = x_k$ ثم انتقل إلى الخطوة ٤.

٣- ضع $a_{k+1} = x_k$ و $b_{k+1} = b_k$ ثم انتقل إلى الخطوة ٤.

٤- إذا كانت $k = n$ توقف والنقطة المثلى تقع في الفترة $[a_{n+1} , b_{n+1}]$ أما إذا كانت $k \ne n$ عندئذ ضع $k \leftarrow k + 1$ وكرر الخطوة (١).

مثال (٥, ٣)

أوجد قيمة للمتغير x تأخذ عندها الدالة f(x) قيمتها الصغرى حيث إن:

$$f(x) = x^2 + 2x$$

تحت القيد:

$$-3 \le x \le 6$$

الحل

نفترض أننا نرغب في تصغير الفترة المبدئية إلى فترة طولها ℓ بحيث أن $\ell \leq 0.2$ وبالتالي فإن عدد التكرارات n الذي يحقق $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{\ell}{b_1 - a_1} = \frac{0.2}{9} = 0.0222$ هو $n = 6$.

يلخص الجدول رقم (٥ , ٣) الحسابات باستخدام طريقة تنصيف الفترة. يلاحظ أن فترة عدم التأكد النهائية هي [0.8907- . 1.0313-] ، وتكون النقطة المثلى في منتصف الفترة، أي $x^* = -0.961$.

الجدول رقم (٥ , ٣).

التكرار k	a_k	b_k	x_k	$f'(x_k)$
1	- 3.0000	6.0000	1.50000	5.0000
2	- 3.0000	1.5000	- 0.7500	0.5000
3	- 3.0000	- 0.7500	- 1.8750	- 1.7500
4	- 1.8750	- 0.7500	- 1.3125	- 0.6250
5	- 1.3125	- 0.7500	- 1.0313	- 0.0625
6	- 1.0313	- 0.7500	- 0.8907	0.2186
7	- 1.0313	- 0.8907		

مثال (٦ , ٣)

أوجد القيمة X التي تكون عندها الدالة f(x) أصغر ما يمكن بحيث إن

$$f(x) = x^2 - 4x + 2$$

تحت الشرط :

$$0 \leq x \leq 10$$

الحل

نفترض أننا نرغب في تصغير الفترة المبدئية إلى فترة طولها ℓ بحيث إن $\ell \leq 0.01$ وبالتالي فإن :

الجدول رقم (٦ , ٣).

التكرار k	a_k	b_k	x_k	$f`(x_k)$
1	0.00000	10.000000	5.000000	6.000000
2	0.00000	5.000000	2.500000	1.000000
3	0.00000	2.500000	1.250000	- 1.500000
4	1.25000	2.500000	1.875000	- 0.250000
5	1.87500	2.500000	2.187500	0.375000
6	1.87500	2.187500	2.031200	0.062500
7	1.87500	2.031200	1.953100	-0.093800
8	1.95310	2.031200	1.992150	- 0.015700
9	1.99215	2.031200	2.011675	0.023350
10	1.99215	2.011675	2.001910	0.003825
11	1.99215	2.001910		

عدد التكرارات n الذي يحقق $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0.001$ هو $n = 10$، ويلخص الجدول رقم (٦ , ٣) حسابات هذا المثال، ويلاحظ أن فترة عدم التأكد النهائية هي [1.99215,2.00191] وتأخذ النقطة المثلى على أنها منتصف الفترة، أي أن $x^* = 1.99703$.

طريقة نيوتن

تستخدم طريقة نيوتن لتصغير دالة مستمرة وتفاضلية من الرتبة الثانية وتعتمد هذه الطريقة على فك الدالة عند x_k.

لاحظ أن التقريب التربيعي q حول النقطة x_k هو:

$$q(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2} f''(x_k)(x - x_k)^2$$

فإذا أخذنا النقطة x_{k+1} هي النقطة التي تكون عندها مشتقة $q(x)$ تساوي الصفر. وهذا يؤدي إلى أن:

$$f'(x_k) + f''(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0$$

ومنها نحصل على المعادلة التكرارية التالية :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} \qquad (٣,١٠)$$

بشرط أن يكون $f''(x_k) \neq 0$ ونتوقف عن التكرار عندما تكون $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ أو عندما $|f'(x_k)| < \varepsilon$ حيث $\varepsilon > 0$ عدد صغير محدد مسبقاً.

مثال (٣,٧)

لتكن الدالة f معرفة بالصيغة :

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3 - 3x^4 & \text{if } x \geq 0 \\ 4x^3 + 3x^4 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن f تفاضلية من الرتبة الثانية لكل قيم x. سوف نطبق طريقة نيوتن مبتدئين من نقطتين مختلفتين لإيضاح أن تقارب الحل يعتمد إلى حد كبير على مدى نجاحنا في اختبار نقطة بداية قريبة من الحل الأمثل.

في الحالة الأولى $x_1 = 0.40$، وكما هو موضح بالجدول رقم (٣,٧) فإن الطريقة تعطي الحل $x^* = 0.002807$. ويمكن للطالب إثبات أن الطريقة سوف تتقارب إلى النهاية الصغرى $x^* = 0.0$ بعد ستة تكرارات. في الحالة الثانية $x_1 = 0.6$ نلاحظ أن الطريقة تعطي حلاً يتذبذب بين النقطتين 0.60 و 0.60 - كما هو موضح بالجدول رقم (٣,٨).

لتخطي هذه المشكلة نحسب معامل α_k. وهذا المعامل يختار بحيث يصغر الدالة f وتأخذ المعادلة (٣,١٠) الشكل التالي :

$$x_{k+1} = x_1 - \alpha_k \cdot \frac{f'(x)}{f''(x)}$$

وبالقـــــرب من الحل الأمثل يتضح سبب حساب α_k بحيث إن $\alpha_k \approx 1$ (α_k تقترب من واحد) وذلك لأنه عند α_k هناك احتمال أن تتزايد الدالة، أيضاً عند $\alpha_k \rightarrow 0$، يوجد احتمال بأن الدالة الموضوعية تتناقص، وللتغلب على هذه المشكلة نحسب α_k بحيث لا نقترب من الواحد أو الصفر.

و لن نتطرق هنا لطريقة حساب α_k لأنها تعتمد على أساس نظري لا يتناسب مع مستوى هذا الكتاب.

الجدول رقم (٣,٧).

التكرار k	x_k	$f'(x_k)$	$f''(x_k)$	x_{k+1}
1	0.400000	1.152000	3.84000	0.100000
2	0.100000	0.108000	2.04000	0.047059
3	0.047059	0.025324	1.049692	0.022934
4	0.022934	0.006167	0.531481	0.01331
5	0.011331	0.001523	0.267322	0.05634
6	0.005634	0.000379	0.134073	0.002807

الجدول رقم (٣,٨).

التكرار k	x_k	$f'(x_k)$	$f''(x_k)$	
1	0.600	1.728	1.440	- 0.600
2	- 0.600	1.728	- 1.440	0.60
3	0.600	1.728	1.440	- 0.600
4	- 0.600	1.728	-1.440	0.66

(٣,٤) تمـــارين

١- أوجـــد باستـخـــدام طريقـــة فيـبـوناتشي، القـيـمـــة الكبـــرى للدالـــة $f(x) = x \cos(x)$ وفي الفـتـرة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ بدرجـة دقـة لا تزيد على $\varepsilon = 0.0001$.

٢- أوجد حل المسألة المعطاة في تمرين ١ باستخدام طريقة الفترة الذهبية.

٣- أوجـد، باسـتـخـدام طريقـةفـيـبـوناتشي، القـيـمـةالصـغـرى للدالة $f(x) = x(2\pi - x)$ في الفترة $[0, 20]$، بحيث لا يزيد طول الفترة النهائية على $\ell = 1$.

٤- حـدد، باسـتـخـدام طريقـة الفـتـرة الذهبـيـة، الفـتـرة التي تكون فـيـهـا الدالة $f(x) = x + 4x^{-1}$ محدبة أو مقعرة.

٥- أوجـد، باسـتـخـدام طريقـة الفـتـرة الذهبـيـة، القـيـمـة الكبـرى للدالة $f(x) = x^2 \sin(x)$ في الفـتـرة $[0, \pi]$ بحـيث لا يزيد طول الفـتـرة النهـائيـة على $L_n = 0.2$.

٦- أوجـد باستخـــدام طريقة نيوتـــن القيمة الصغـرى للدالة $f(x) = x \sin(x)$ في الفترة $[0, 3]$ مسجلاً ملاحظاتك على التقارب.

٧- أوجد، باستخدام طريقة تنصيف الفترة، القيمة الصغرى، وأعد حل المسألة (٦) متخذاً فترة نهائية $L = 0.1$.

٨- أوجد القيمة الصغرى للدالة $f(x) = \frac{(4x - 7)}{(x^2 + x - 2)}$ بتكرار حساب الدالة عشر مرات فقط متخذاً الفترة المبدئية $[-1.9, 0.9]$.

٩- أوجد النهاية الصغرى للدالة $f(x) = (x - 1)^2$ في الفترة $0 \le x \le 3$.

١٠- أوجـد النهـاية الصـغـرى للدالـة $f(x) = e^{-0.01x^2} \cos(0.5x)$ في الفـــترة $0 \le x \le 10$.

الفصل الرابع

البرمجة غير الخطية وغير المقيدة

• مقدمة • الطريقة التقليدية • الطريقة التكرارية • تمارين

(٤,١) مقدمة

يتعرض هذا الفصل لطرق مختلفة لحل مشكلات التصغير غير الخطية وغير المقيدة (unconstrained methods) متعددة المتغيرات، نورد منها الطريقة التقليدية وبعض الطرق التكرارية مثل: طرق الاتجاه المباشر وطرق الاتجاه المتدرج.

يلاحظ إن حل أي مسألة تصغير غير مقيدة، يتعين علينا إيجاد قيم مناسبة لمتغيرات متجه القرار:

$$\mathbf{x} = \left\{x_1 \ , \ \dots \ , \ x_n\right\}$$

وذلك من أجل تصغير دالة الهدف $f(\mathbf{x})$.

يمكن النظر إلى هذه المسألة على أنها حالة خاصة من الحالة العامة غير الخطية المقيدة التي تكون فيها مجموعة القيود مجموعة خالية، وأن الخاصية الأساسية

المميزة لهذه المسألة عن غيرها من المسائل المقيدة، إن متجه الحل **X** ليس في حاجة إلى تحقيق أي قيد.

ينـدر في الواقـع العـمـلي أن نجـد مسـألة برمجـة مصـوغـة في صـورة غـير مقيدة، ومـع ذلـك فإنه لدراسـة هذا النـوع من المسائـل أهمـية كبيرة لعـدة أسباب نذكر منها:

١- وجود طرق قوية وملائمة لتحويل المسائل المقيدة إلى مسائل غير مقيدة، ومن ثم يمكن حل المسائل المقيدة بأسلوب أسهل وأكثر مباشرة.
٢- دراسة مسائل التصغير غير المقيدة توضح المفاهيم الضرورية اللازمة لدراسة الأمثلية المقيدة.
٣- يتطلب تصميم بعض المسائل المقيدة وصياغتها معالجة مماثلة لما هو موجود في المسائل غير المقيدة ماعدا عند نقطة التصغير.

وسوف ندرس في البنود القادمة بعض طرق الحل المناسبة التي أشرنا إليها في بداية هذا البند.

(٤,٢) الطريقة التقليدية

تعتمد الطريقة التقليدية (classical method) على نظريتين مهمتين لتحديد الشروط الضرورية الكافية لإيجاد القيمة المثلى (الصغرى أو العظمى) لدالة متعددة المتغيرات، سنوردهما فيما يلي مع برهانيهما.

نظرية (٤,١)

إذا كانت جميع المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية معرفة للدالة $f(\mathbf{x})$ وليكن الشرط الضروري لكي تكون النقطة $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ نقطة طرفية (حدية) هو:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\mathbf{x}^*} = \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_{\mathbf{x}^*} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\mathbf{x}^*} = 0 \qquad (٤,١)$$

البرهان

لنفرض أن إحدى المشتقات الجزئية الأولى ولتكن المشتقة بالنسبة للمتغير رقم k لم تختف عند $\mathbf{x}^*$، فباستخدام نظرية تايلور (Taylor) نجد أن :

$$f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) + \frac{1}{2!} d^2 f(\mathbf{x}^* + \theta\mathbf{h})$$

حيث :

$$\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n), \quad 0 < \theta < 1$$

و $h_i \geq 0$ مقدار صغير (غير سالب) لكل $i = 1,2,\dots,n$

يلاحظ أن $d^2 f(\mathbf{x}^* + \theta\mathbf{h})$ من رتبة h_i^2 وبالتالي فإنه يمكن إهماله بحيث تكون إشارة المقدار $f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^*)$ في الطرف الأيسر تتحدد بإشارة المقدار $h_k \dfrac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_k}$.

لنفرض أولا أن $\dfrac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}_k} > 0$. في هذه الحالة تكون إشارة $f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^*)$ هي نفس إشارة $h_k \dfrac{\partial f(x^*)}{\partial x_k}$. وهذا يعني أن $\mathbf{x}^*$ لا يمكن أن تكون نقطة طرفية . يمكن الحصول على النتيجة نفسها إذا افترضنا أن $\dfrac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_k} < 0$

وتتعارض هذه والنتيجة مع كون $\mathbf{x}^*$ نقطة حدية (طرفية)، ولذا فلابد أن تكون $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} = 0$ عند $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$. وبهذا ينتهي برهان النظرية .

نظرية (٢ , ٤)

الشـرط الكـافي لنقطة الاسـتقـرار $\mathbf{x}^*$ لكي تكون نقطة حـدية أو طرفـيـة هو أن تكون لمصفوفة المشتقات الجزئية الثانية، أي لمصفوفة هس (Hessian matrix) ، محسوبة عند $\mathbf{x}^*$ إحدى الخاصيتين التاليتين:

(أ) مؤكدة الإيجاب عندما تكون $\mathbf{x}^*$ نقطة تصغير موضعية، أو

(ب) مؤكدة السلبية عندما تكون $\mathbf{x}^*$ نقطة تكبير موضعية.

البرهان

من نظرية تايلور يمكننا كتابة:

$$f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^* + \theta \mathbf{h})}{\partial x_i \, \partial x_j} \qquad (٢ , ٤)$$

لقيم $0 < \theta < 1$.

حيث إن $\mathbf{x}^*$ نقطة استقرار. طبقاً لنظرية (١ , ٤) السابقة فإن

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n$$

لذا فإن المعادلة (٢ , ٤) تصبح

$$f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^* + \theta \mathbf{h})}{\partial x_i \, \partial x_j}$$

$$, \; 0 < \theta < 1$$

من ذلك نلاحظ أن إشارة $f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^*)$ هي نفس إشارة المقدار

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^* + \theta \mathbf{h})}{\partial x_i \, \partial x_j}$$

وحيث إن المشتقات الجزئية الثانية $\dfrac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i \, \partial x_j}$ مستمرة في جوار النقطة $\mathbf{x}^*$ ؛

أي أن $\dfrac{\partial^2 f(\mathbf{x}^* + \theta \mathbf{h})}{\partial x_i \, \partial x_j}$ مستمرة، فإنه سيكون لها نفس إشارة المقدار $\dfrac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i \, \partial x_j}$

لجميع قيم h الصغيرة صغراً كافياً.

لذا فإن إشارة $f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^*)$ تكون موجبة إذا كانت:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i \, \partial x_j} \qquad (٤,٣)$$

موجبة. لكن الكمية Q صيغة تربيعية ويمكن كتابتها في صيغة مصفوفية كما يلي

$$Q = \mathbf{h}^T \; \mathbf{H} \, \mathbf{h} \, \big|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}^*} \qquad (٤,٤)$$

حيث:

$$\mathbf{H} \, \big|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}^*} = \left[\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i \, \partial x_j} \right]$$

هي مصفوفة المشتقات الجزئية الثانية التي تسمى مصفوفة هس للدالة $f(\mathbf{x})$.

من المعروف من جبر المصفوفات أن الصيغة التربيعية (٤,٣) و (٤,٤) تكون موجبة لجميع قيم **h** إذا كانت – وكانت فقط – المصفوفة **H** مؤكدة الإيجاب (positive definite) عند $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$. "انظر الملاحق بند (٤,٨)" .

وهذا يعني أن الشرط الكافي لنقطة الإستقرار $\mathbf{x}^*$ لكي تكون نهاية صغرى نسبية أو موضعية أن تكون مصفوفة هس المحسوبة عند نفس النقطة مؤكدة الإيجاب. وهذا يكمل البرهان في حالة التصغير.

باستخدام أسلوب مماثل يمكن إثبات أن مصفوفة هس تكون مؤكدة السلبية في حالة التكبير.

ولتوضيح كيفية استخدام النظريتين السابقتين نورد الأمثلة التالية.

مثال (٤,١)

أوجد النهاية الكبرى لدالة الهدف **f** إذا كانت:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 29x_2 - 26x_3 - x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3 - x_1^2 - 3x_2^2 - x_3^2 \qquad (٤,٥)$$

الحل

من الشرط الضروري نحصل على

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1 - x_2 + x_3 - 2x_1 = 0 \qquad (٤,٦)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -29 - x_1 - x_3 - 6x_2 = 0 \qquad (٤,٧)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = -26 + x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \qquad (٤,٨)$$

وبحل مجموعة المعادلات (٤,٦) – (٤,٨) آنيا نحصل على:

$$\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (-7, -1, -16)$$

وللتأكد من الشرط الكافي نوجد مصفوفة هس H_f المرتبطة بالدالة f هي:

$$H_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3\, \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3\, \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{bmatrix}$$

بالتعويض عن قيم المشتقات نجد أن:

$$H_{f(x^*)} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -6 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

والمحددات الجزئية أو الفرعية الرئيسة (principal minors) لهذه المحددة هي:

$$|-2| = -2 \;,\; \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = 11 \;,\; \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -6 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -12$$

أي أن إشارة المحددات الجزئية هي −، +، − وبالتالي فإن $H_{f(x^*)}$ سالبة مؤكدة، وهذا يعني أن للدالة نهاية عظمى عند x^* وقيمتها $f(x^*) = 219$.

مثال (٤,٢)

وجد أن إنتاج مصنع عبارة عن دالة في متغيرين x_2 , x_1، والمطلوب إيجاد قيمة المتغيرين التي يكون عندهما الإنتاج أكبر ما يمكن علماً بأن دالة الإنتاج هي:

$$P(x_1 \,,\, x_2) = 8x_1 + 2x_2 - x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 \qquad (٤,٩)$$

الحالة شبه المحددة

نصادف بعض الحالات التي تكون فيها مصفوفة هس غير محددة، وهي ما نُشير إليها بالحالات شبه المحددة (semi-definite)، كما نصادف حالات أخرى تكون فيها مصفوفة هس غير محددة، "ولهذه الحالة الأخيرة علاقة بما يسمى نقطة السرج (saddle point)، انظر الملاحق، والتي نعرضها فيما يلي:

نقطة السرج

قد تكون مصفوفة هس لبعض الدوال ذات المتغيرين $f(x_1, x_2)$ غير مؤكدة الإيجاب و غير مؤكدة السلبية عند النقطة $\left(x_1^*, x_2^*\right)$ والتي يكون عندها:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$$

في مثل هذه الحالة تسمى النقطة $\left(x_1^*, x_2^*\right)$ نقطة السرج (saddle point). مميزات نقطة السرج أنها تناظر نهاية صغرى موضعية نسبية أو نهاية عظمى موضعية نسبية للدالة $f(x_1, x_2)$ بالنسبة لمتغير واحد وليكن x_1 عندما يكون المتغير x_2 ثابتاً عند $x_2 = x_2^*$، ويكون للدالة $f(x_1, x_2)$ نهاية كبرى أو صغرى نسبية بالنسبة للمتغير الثاني x_2 عندما يكون المتغير الآخر ثابتاً عند $x_1 = x_1^*$ لهذه الدالة.

فعلى سبيل المثال، نلاحظ أن للدالة $f\left(x_1, x_2\right) = x_1^2 - x_2^2$ المشتقات $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1$ و $\frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_2$، ونلاحظ أن المشتقات الأولى تكون صفراً عند $x_1^* = 0$ و $x_2^* = 0$.

مصفوفة هس لهذه الدالة عند النقطة $\left(x_1^*, x_2^*\right) = (0, 0)$ هي $\mathbf{H}_{f(0,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$، وحيث إن المصفوفة ليست مؤكدة الإيجاب، وليست

مؤكدة، السالبية، فإن النقطة $\left(x_1^*, x_2^*\right) = (0, 0)$ هي نقطة سرج.

ومميزات هذه النقطة أنها تظل مناسبة إذا استبدلنا النقطة (x_1, x_2) بمتجه في الحالات المتعددة المتغيرات.

مثال (٤,٣)

أوجد النقط الطرفية للدالة:

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 - x_2x_3 + 4x_1 + 12 \qquad (٤,١٢)$$

الحل

بإيجاد المشتقات الأولى للدالة f ومساواتها بالصفر نحصل على:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - 2x_3 + 4 = 0 \qquad (٤,١٣)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_2 - x_3 = 0 \qquad (٤,١٤)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \qquad (٤,١٥)$$

وبحل مجموعة المعادلات (٤,١٣)، (٤,١٤) و(٤,١٥) آنيا نحصل على نقطة الاستقرار:

$$\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*\right) = (-10, 4, 8)$$

المشتقات الجزئية الثانية لهذه الدالة هي:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_3} = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_3} = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \, \partial x_2} = -1 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \, \partial x_1} = -2$$

وتكون مصفوفة هس عند النقطة (-10 , 4 , 8) :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ومن ذلك نجد أن قيم المحددات الجزئية الرئيسة هي :

$$|D_1| = |2| = 2 \quad , \quad |D_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 ,$$

$$|D_3| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

أي أن مصفوفة هس غير مؤكدة الإيجاب وغير مؤكدة السالبية وبالتالي تكون نقطة الاستقرار (-8 , 4 , -10) نقطة سرج.

مثال (٤ , ٤)

أوجد النقاط الحدية (الطرفية) للدالة :

$$f(x_1 \, , x_2) = 2x_1^3 + 2x_2^3 + 8x_1^2 + 16x_2^2 + 12 \qquad (٤ , ١٦)$$

الحل

الشروط الضرورية لوجود نقطة حدية هي أن يكون :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 6x_1^2 + 16x_1 = 0 \qquad (٤ , ١٧)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 6x_2^2 + 32x_2 = 0 \qquad (٤ , ١٨)$$

المعادلتان (٤ , ١٧) و (٤ , ١٨) تتحققان عند الأربع نقط :

$$(0 , 0) , \left(0 , \frac{-16}{3}\right) , \left(\frac{-8}{3} , 0\right) , \left(\frac{-8}{3} , \frac{-16}{3}\right)$$

لإيجاد طبيعة النقط الحدية نستخدم الشرط الكافي ، فنلاحظ أن مصفوفة هس H المناظرة للدالة f هي :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 12x_1 + 16 & 0 \\ 0 & 12x_2 + 32 \end{bmatrix}$$

وعند النقطة (0 , 0) تكون المصفوفة هي :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 32 \end{bmatrix}$$

وقيم المحددات الجزئية الرئيسة هي : $H_1 = +16$, $H_2 = +512$

أي أن مصفوفة هس مؤكدة الإيجاب ، وهذا يعني أن النقطة (0, 0) نهاية صغرى نسبية ، وعندها تكون قيمة الدالة $f(x_1 , x_2) = 12$ أما عند النقطة $\left(0 , \frac{-16}{3}\right)$ فتكون المصفوفة هي :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -32 \end{bmatrix}$$

وقيم المحددات الجزئية الرئيسة المرافقة هي $H_1 = +16$, $H_2 = -512$ ، وبالتالي تكون مصفوفة هس غير مؤكدة وتكون النقطة نقطة سرج .

أما عند النقطة $\left(\frac{-8}{3} , \frac{-16}{3}\right)$ فمصفوفة هس للدالة هي :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -32 \end{bmatrix}$$

وقيم المحددات الجزئية الرئيسة هي $H_1 = -16$ ، $H_2 = +512$ ، وبالتالي تكون مصفوفة هس مؤكدة السلبية وعندها تكون قيمة الدالة هي $f(x_1^*, x_2^*) = 182.7$.

(٣,٤) الطريقة التكرارية

لقد عرضنا في البند السابق الطريقة التقليدية الخاصة بحل مسألة الأمثلية غير الخطية وغير المقيدة. ولكن لهذه الطريقة بعض العيوب أهمها:

(أ) عدم إمكانية تطبيقها لتحديد النقطة المثلى لبعض الدوال.

(ب) صعوبة تطبيقها إذا كان عدد المتغيرات كبيراً نسبياً.

لتجاوز مثل هذه العيوب، استحدث بعض الدارسين العديد من الطرق التكرارية (iterative methods) المناسبة، وقد ساعد التقدم الكبير في تقنية الحاسبات الآلية، وكبر سعتها التخزينية، وسرعتها على سهولة استخدام الطرق التكرارية وتطورها. تتفق الطرق التكرارية المتعددة في خطوات عامة للوصول إلى الحل الأمثل؛ وذلك بالبدء بنقطة حل تجريبية ومنها نتقدم في اتجاه نقطة التصغير أو التكبير بأسلوب تتابعي على النمط نفسه. توضح خريطة سير العمليات في الشكل (٤,١) طريقة حساب النقطة المثلى في الطرق التكرارية بصفة عامة. نلاحظ أن الطرق التكرارية تنقسم إلى نوعين رئيسين، يسمى الأول بطرق البحث المباشر (direct search) ويسمى النوع الثاني بالطرق الانحدارية (descent methods).

تتطلب طرق البحث المباشر قيم دالة الهدف فقط ولا تستخدم المشتقات الجزئية للدالة، وتعتبر هذه الطرق مناسبة لحل المسائل البسيطة التي تحتوي على عدد

صغير من المتغيرات. ويلاحظ أن طرق البحث المباشر أقل كفاءة عموماً من الطرق الانحدارية.

تتطلب الطرق الانحدارية حساب دالة الهدف وحساب المشتقة الأولى أو ربما مشتقات من رتب أعلى وتسمى أحياناً بطرق المتجه المتدرج (gradient methods). وسوف نشرح فيما يلي كيفية استخدام الطرق من النوعين:

(٤,٣,١) طرق البحث المباشر

يوجد العديد من طرق البحث المباشر المستخدمة في الأمثلية والبرمجة الرياضية نذكر من أهمها ما يلي:

(أ) طرق البحث العشوائي "random search methods".

(ب) طريقة تدوير الاتجاهات "the rotating directions method".

(جـ) طريقة السمبلكس "simplex method".

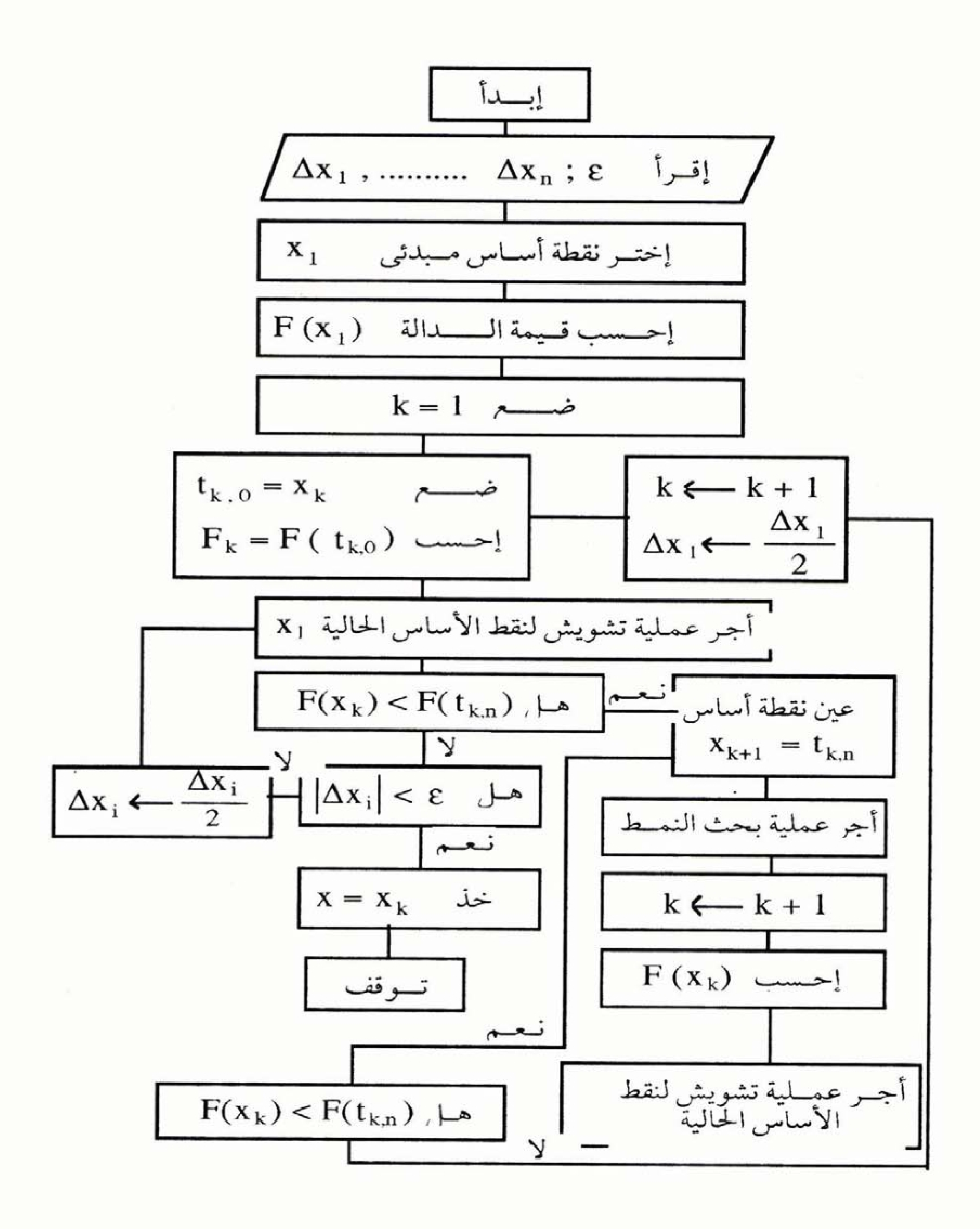
(د) طرق بحث النمط "pattern search method".

ويمكن القول أن أبسط الخوارزميات المعروفة للطرق الأربعة السابقة هي الخوارزمية التالية التي تسمى بخوارزمية هوك – جيفز (Hook - Jeeves)

(٤,٣,١,١) خوارزمية بحث نمط هوك - جيفز

تعتبر خوارزمية هوك – جيفز من طرق البحث التي تستخدم التحركات الاستكشافية، وتحدد اتجاهاً قياسياً وتحركات نمط معينة. لتحركات النمط دور أساسي في سرعة عملية البحث وتعجيلها.

يمكن تلخيص الوصف العام للخوارزمية في الخطوات التالية:



الشكل رقم (٤,١). خطوات حساب النقطة المثلى.

الخطوة ١

نختار رقما صغيرا $\varepsilon > 0$ يستخدم لإيقاف التكرارات، ونحدد أطوال خطوات مبدئية $\Delta x \geq \varepsilon$ ومحاور الإحداثيات $\mu_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$

نبدأ بنقطة أساس اختيارية ولتكن x (starting base) ثم نضع $k=1$.

الخطوة ٢

نحسب $f = f(\mathbf{x}_k)$ ثم نضع $\mathbf{t}_{k,0} = \mathbf{x}_k$ ثم نبدأ حركة بحث استكشافية كما هو وارد في الخطوة ٣.

الخطوة ٣

نجري تشويشا لمركبات المتغير $\mathbf{x}_k$ (الذي يمثل نقطة الأساس المؤقتة الجارية) للحصول على نقطة أساس مؤقتة أخرى، وذلك بتوليد النقاط $\mathbf{t}_{k,1} \ , \ \mathbf{t}_{k,2} \ , \ \ldots \ , \ \mathbf{t}_{k,n}$ على التتابع باستخدام مجموعة المعادلات التالية:

$$\mathbf{t}_{k,i} = \begin{cases} \mathbf{t}_{k,i-1} + \Delta x_i \ u_i & \text{if } f^+ \equiv f(\mathbf{t}_{k,i-1} + \Delta x_i u_i) < f \equiv f(\mathbf{t}_{k,i-1}) \\ \mathbf{t}_{k,i-1} - \Delta x_i u_i & \text{if } f^- \equiv f(\mathbf{t}_{k,i-1} - \Delta x_i u_i) < f \equiv f(\mathbf{t}_{k,i-1}) < f^+ \equiv f(\mathbf{t}_{k,i-1} + \Delta x_i u_i) \\ \mathbf{t}_{k,i-1} & \text{if } f \equiv f(\mathbf{t}_{k,i-1}) < \min(f^+ \ , \ f^-) \end{cases}$$

$$, i = 1 \ , \ldots , n$$

حيث:

$$\mathbf{t}_{k,i-1} + \Delta x_i u_i = (t_{k,1}, \ldots, \ t_{k,i-1}, \ldots \ , \ t_{k,n}) + (0 \ , \ldots \ , \Delta x_i u_i \ , \ \ldots \ , 0)$$

الخطوة ٤

إذا كانت النقطة $\mathbf{t}_{k,n}$ مختلفة عن $\mathbf{x}_k$، نخرج بنقطة أساس جديدة $\mathbf{x}_{k+1} \equiv \mathbf{t}_{k,n}$ وننتقل لتنفيذ الخطوة ٥ أما في حالة تساوي $\mathbf{t}_{k,n}$ مع $\mathbf{x}_k$ فإننا نعدل الخطوة إلى نصف الخطوة السابقة $\frac{\Delta \mathbf{x}_i}{2}$ ونكرر عملية التشويش الواردة في الخطوة ٣.

الخطوة ٥

نستخدم $\mathbf{x}_k$ و $\mathbf{x}_{k+1}$ لنحصل على اتجاه النمط (pattern direction)

$$\mathbf{s} = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k \qquad (٤,١٩)$$

ثم نجد نقطة $\mathbf{t}_{k+1,0}$ من المعادلة التالية:

$$\mathbf{t}_{k+1,0} = \mathbf{x}_{k+1} + \lambda\ \mathbf{s} \qquad (٤,٢٠)$$

حيث λ هو طول الخطوة في اتجاه النمط $\mathbf{s}$. إذا أردنا التبسيط يمكن أخذ $\lambda = 1$ والبديل هو حل مشكلة تصغير ذات متغير واحد واستخدام طول الخطوة الأمثل λ^* في المعادلة (٢٠ , ٤) بدلاً من λ (كما سنشاهد في الأمثلة الرقمية التالية).

الخطوة ٦

نضع $k=k+1$, $f_k = f(\mathbf{t}_{k,0})$, $i=1$ ثم نكرر الخطوة ٣، في نهاية الخطوة ٣ إذا كانت $f(\mathbf{t}_{k,n}) < f(\mathbf{x}_k)$ نأخذ نقطة أساس جديدة ونعود إلى تنفيذ الخطوة ٥، أما إذا كانت $f(\mathbf{t}_{k,n}) \geq f(\mathbf{x}_k)$ نضع $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k$ ثم ننقص طول الخطوة Δx_i إلى نصف قيمتها السابقة ثم نضع $k=k+1$ ثم ننتقل إلى الخطوة ٢.

في كافة الخطوات التكرارية السابقة نتوقف عن الاستمرار إذا أصبحت أكبر الخطوات في أي مرحلة أصغر من ε، أي أن:

$$\max_i(\Delta x_j) < \varepsilon \ .$$

مثال (٤,٥)

أوجد القيمة الصغرى للدالة:

$$f(x_1, x_2) = x_1 - x_2 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \quad (٤,٢١)$$

مبتدئاً من النقطة $x_1=(0,0)$ ، مع أخذ $\varepsilon = 0.1\ ,\ \Delta x_1 = \Delta x_2 = 0.8$

الحل

نتبع لحل هذا المثال الخطوات السابق إيرادها في وصف خوارزمية هوك - جيفز كما يلي:

الخطوة ١

نأخذ $x_1 = (0,0)$ نقطة بداية أساسية وأطوال خطوة $\Delta x_1 = 0.8\ ,\ \Delta x_2 = 0.8$ في اتجاه الإحداثيين $u_1\ ,\ u_2$ على الترتيب ونضع $k=1$.

الخطوة ٢

$$f_1 = f(\mathbf{x}_1)\ ,\ i=1\ ,\ \mathbf{t}_{1,0} = \mathbf{x}_1 = (0,0)$$

الخطوة ٣

لإيجاد نقطة أساس جديدة مؤقتة نحسب الإحداثي $i = 1$

$$f = f(\mathbf{t}_{1,0}) = 0$$

$$f^+ = f(\mathbf{t}_{1,0} + \Delta x_1 u_1) = f(0.8, 0.0) = 2.08$$

$$f^- = f(\mathbf{t}_{1,0} - \Delta x_1 u_1) = f(-0.8, 0.0) = 0.48$$

وحيث إن:

$$f < \min(f\ ,\ f^-)$$

نأخذ $\mathbf{x}_1 = \mathbf{t}_{1,0}$ وللإحداثي الثاني $i=2$ نحسب:

$$f = f(\mathbf{t}_{1,1}) = 0$$

$$f^+ = f(\mathbf{t}_{1,1} + \Delta x_2 u_2) = f(0.0, 0.8) = -0.16$$

$$f(x_1 , x_2) = x_1 - x_2 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \qquad (٤,٢١)$$

مبتدئاً من النقطة $x_1=(0,0)$ ، مع أخذ $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0.8$, $\varepsilon = 0.1$

الحل

نتبع لحل هذا المثال الخطوات السابق إيرادها في وصف خوارزمية هوك - جيفز كما يلي :

الخطوة ١

نأخذ $x_1 = (0,0)$ نقطة بداية أساسية وأطوال خطوة $\Delta x_1 = 0.8$, $\Delta x_2 = 0.8$ في اتجاه الإحداثيين u_1 , u_2 على الترتيب ونضع $k=1$.

الخطوة ٢

$$f_1 = f(\mathbf{x}_1) \;,\; i=1 \;,\; \mathbf{t}_{1,0} = \mathbf{x}_1 = (0,0)$$

الخطوة ٣

لإيجاد نقطة أساس جديدة مؤقتة نحسب الإحداثي $i = 1$

$$f = f(\mathbf{t}_{1,0}) = 0$$

$$f^+ = f(\mathbf{t}_{1,0} + \Delta x_1 u_1) = f(0.8,0.0) = 2.08$$

$$f^- = f(\mathbf{t}_{1,0} - \Delta x_1 u_1) = f(-0.8,0.0) = 0.48$$

وحيث إن :

$$f < \min(f , f^-)$$

نأخذ $\mathbf{x}_1=\mathbf{t}_{1,0}$ وللإحداثي الثاني $i=2$ نحسب :

$$f = f(\mathbf{t}_{1,1}) = 0$$

$$f^+ = f(\mathbf{t}_{1,1} + \Delta x_2 u_2) = f(0.0,0.8) = -0.16$$

وحيث إن:

$$f^+ < f$$

نضع:

$$\mathbf{t}_{1,2} = (0.0\ ,\ 0.8)$$

الخطوة ٤

حيث إن $\mathbf{t}_{1,2}$ مختلفة عن $\mathbf{x}_1$ فإن نقطة الأساس الجديدة هي $(0.0,0.8)=$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{t}_{1,2}$$

الخطوة ٥

نعين اتجاه النمط كالآتي:

$$s = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = (0,0.8) - (0,0) = (0,0.8)$$

يمكن الحصول على طول (أو مقدار) الخطوة الأمثل λ^* بتصغير الدالة:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_2 + \lambda \mathbf{s}) &= f(0.0,0.8+0.8\lambda) \\ &= 0.64\lambda^2 + 0.48\lambda - 0.16 \end{aligned}$$

حيث:

$$\frac{df}{d\lambda} = 1.28\lambda + 0.48$$

وبوضع $\frac{df}{d\lambda} = 0$

نجد أن $\lambda^* = -0.375$.

ومن ذلك نحصل على:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{2,0} = \mathbf{x}_2 + \lambda^* s &= (0,.8) - 0.375(0,.8) \\ &= (0,0.5) \end{aligned}$$

الخطوة ٦

نضع $k=2$

نحسب : $f = f(0,0.5) = -0.8$

نكرر الخطوة ٣

- عند $i=1$

$$f^{+} = f(t_{2,0} + \Delta x_1 u_1) = f(0.8,0.5) = 2.63$$

$$f^{-} = f(t_{2,0} + \Delta x_1 u_1) = f(-0.8,0.5) = -0.57$$

وحيث إن :

$$f^{-} < f < f^{+}$$

لذلك نأخذ :

$$\mathbf{t}_{2,1} = (-0.8,0.5)$$

ونحسب :

$$f(t_{2,1}) = -0.57$$

- وعند $i=2$

$$f^{+} = f(t_{2,1} + \Delta x_2 u_2) = f(-0.8,1.3) = -1.21$$

وحيث إن :

$$f^{+} < f \quad , \quad \mathbf{t}_{2,2} = (-0.8,1.3)$$

ولأن :

$$f(\mathbf{t}_{2,2}) = -1.21 < f(\mathbf{x}_2) = 0.16$$

نأخذ نقطة أساس جديدة :

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{t}_{2,2} = (-0.8\ ,\ 1.3)$$

ثم ننتقل إلى الخطوة ٥ .

الخطوة ٥

نعين اتجاه النمط حيث نحسب :

$$\mathbf{s} = \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2 = (-0.8,1.3) - (0,0.8) = (-0.8,0.5)$$

ثم نحصل على طول الخطوة الأمثل λ^* بتصغير :

$$f\left(\mathbf{x}_3 + \lambda\mathbf{s}\right) = f(-0.8-0.8\lambda\ ,\ 1.3 + 0.5\lambda)$$
$$= 0.73\,\lambda^2 - 0.32\lambda - 1.21$$

وتكون مشتقة هذه الدالة بالنسبة للمتغير λ هي :

$$\frac{df}{d\lambda} = 1.46\lambda - 0.32$$

ومن ذلك نحصل على :

$$\lambda^* = 0.219$$

وتكون النقطة $\mathbf{t}_{3,0}$ هي :

$$\mathbf{t}_{3,0} = \mathbf{x}_3 + \lambda^*\mathbf{s} = (-0.8,1.3) + 0.219(-0.8,0.5)$$
$$= (-0.975\ ,\ 1.410)$$

الخطوة ٦

نكرر الخطوة ٣ : ضع $k=3$, $f = f_3 = f\left(\mathbf{t}_{3,0}\right) = -1.235$ عند $i=1$

$$f^+ = f\left(\mathbf{t}_{3,0} + \Delta x_1 u_1\right) = f(-0.175,1.410) = -0.018$$

$$f^- = f\left(\mathbf{t}_{3.0} - \Delta x_1 u_1\right) = f(-1.775,1.410) = 0.105$$

وحيث إن :

$$f(-0.975,1.41) = -1.235$$

فإن :

$$f < \min(f^+\ ,\ f^-)$$

عندئذ نضع :

$$\mathbf{t}_{3,2} = \mathbf{t}_{3,1} = (-0.975, 1.41)$$

حيث إن :

$$f(\mathbf{t}_{3,2}) = -1.235 < f(\mathbf{x}_3) = -1.21$$

نأخذ نقطة أساس جديدة :

$$\mathbf{x}_4 = \mathbf{t}_{3,2} = (-0.975, 1.41)$$

ثم ننتقل إلى الخطوة رقم ٥ .

وبتكرار العمليات السابقة حسب الخطوات والمراحل المحددة عدة مرات مع ملاحظة التقريب المطلوب وهو في هذه الحالة $\varepsilon = 0.1$ نحصل على نقطة الحل المثلى (optimal) وهي :

$$\mathbf{x}_{opt} = (-1.0\ ,\ 1.5)$$

مثال (٦ , ٤)

أوجد القيمة الصغرى للدالة :

$$f(x_1\ , x_2) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1 + 3x_2$$

باعتبار أن $x_1 = (0, 0)$ نقطة بداية أساسية ، وأن طول الخطوة هو $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 1$ ، والخطأ المقبول هو $\varepsilon = 0.25$ و $\lambda = 1$

الحل

كما في المثال السابق نتبع خطوات الحل كما يلي :

الخطوة ١

نضع $k=1$ نأخذ $x_1 = (0, 0)$ نقطة بداية أساسية وأطوال الخطوة

$\Delta x_1 = \Delta x_2 = 1$ في اتجاه الإحداثيان u_1 , u_2 على الترتيب ثم نضع $k=1$.

الخطوة ٢

$$f_1 = f(0,0) = 0, \quad \mathbf{t}_{1,0} = \mathbf{x}_1 = (0,0)$$

الخطوة ٣

لإيجاد نقطة أساس جديدة مؤقتة نضع $i=1$ ، ونحسب :

$$f = f(\mathbf{t}_{1,0}) = 0$$

$$f^+ = f(\mathbf{t}_{1,0} + \Delta x_1 u_1) = 7$$

$$f^- = f(\mathbf{t}_{1,0} - \Delta x_1 u_1) = f(-1,0) = -1$$

ومن ذلك نلاحظ أن :

$$f^- < f < f^+$$

ولذا فإن :

$$\mathbf{t}_{1,1} = (-1,0)$$

ثم نضع $i=2$ ونحسب :

$$f = f(\mathbf{t}_{1,1}) = -1$$

$$f^+ = f(\mathbf{t}_{1,1} + \Delta x_2 u_2) = f(-1,1) = 5$$

$$f^- = f(\mathbf{t}_{1,1} - \Delta x_2 u_2) = f(-1,-1) = -5$$

وحيث إن :

$$f^- < f < f^+$$

فإن :

$$\mathbf{t}_{1,2} = (-1,-1)$$

الخطوة ٤

حيث إن $\mathbf{t}_{1,2}$ مختلفة عن $\mathbf{x}_1$ فإن نقطة الأساس الجديدة وتصبح

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{t}_{1,2} = (-1,-1)$$

الخطوة ٥

نعين اتجاه النمط كما يلي :

$$\mathbf{s} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = (-1,-1) - (0,0) = (-1,-1)$$

$$\mathbf{t}_{2,0} = \mathbf{x}_2 + \lambda \mathbf{s} = (-1,-1) + (-1,-1) = (-2,-2)$$

الخطوة ٦

نضع $k=2$ ونحسب :

$$f\left(\mathbf{t}_{2,0}\right) = -6$$

ثم نكرر الخطوة ٣

$$f^{+} = f\left(\mathbf{t}_{2,0} + \Delta x_1 u_1\right) = f(-1,-2) = -7$$

عند $i=1$

وحيث إن :

$$f^{+} < f$$

فإن :

$$\mathbf{t}_{2,1} = (-1,-2)$$

وعند $i=1$ نلاحظ أن :

$$f(\mathbf{t}_{2,1}) = f(-1,-2) = -7$$

$$f^+ = f(\mathbf{t}_{2,1} + \Delta x_2 u_2) = f(-1,-1) = -5$$

$$f^- = f(\mathbf{t}_{2,1} - \Delta x_2 u_2) = f(-1,-3) = -7$$

أي أن :

$$f = \min(f^+ , f^-)$$

ومن الملاحظ هنا أن التحرك الاستكشافي في الاتجاه الثاني لم يصغر قيمة الدالة عن قيمتها قبل إجراء هذه التحرك أي عن قيمتها عند $(-1 , -2)$ ولذا فإن $\mathbf{t}_{2,2} = \mathbf{t}_{2,1} = (-1,-2)$ وحيث إن نقطة الأساس المؤقتة $\mathbf{t}_{2,2}$ مختلفة عن نقطة الأساس $\mathbf{x}_2$ نأخذ $\mathbf{x}_3 = (-1, -2)$ كنقطة أساس حدية .

نتنقل بعد ذلك لإجراء الخطوة ٥ كما يلي :

$$\mathbf{S} = \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2 = (-1,-2) - (-1,-1) = (0,-1)$$

$$\mathbf{t}_{3,0} = \mathbf{x}_3 + \lambda \mathbf{s} = (-1,-2) + (0,-1) = (-1,-3)$$

الخطوة ٦

نضع $k=3$ ونحسب :

$$f(\mathbf{t}_{3,0}) = -7$$

ثم نكرر الخطوة ٣ عند $i=1$

$$f^+ = f(\mathbf{t}_{3,0} + \Delta x_1 u_1) = f(0,-3) = 0$$

$$f^- = f(\mathbf{t}_{3,0} - \Delta x_1 u_1) = f(-2,-3) = -8$$

من ذلك نجد أن :

$$f^- < f < f^+$$

وبالتالي فإن :

$$\mathbf{t}_{3,1} = (-2,-3)$$

وعند i=2 :

$$f(\mathbf{t}_{3,1}) = -8$$

$$f^+ = f(\mathbf{t}_{3,1} + \Delta x_2 u_2) = f(-3,-2) = -6$$

$$f^- = f(\mathbf{t}_{3,1} - \Delta x_2 u_2) = f(-2,-4) = -8$$

ومن ذلك نلاحظ أن :

$$f \leq \min(f^+ , f^-)$$

أي أن نقطة الأساس المؤقتة :

$$\mathbf{t}_{3,2} = \mathbf{t}_{3,1}$$

وبما أنها مختلفة عن $\mathbf{x}_3$ نأخذ $\mathbf{x}_4 = (-2, -3)$.

بعد ذلك ننفذ الخطوة (٥) لتحديد الاتجاه فنكتب :

$$\mathbf{s} = \mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_3 = (-2,-3) - (-1,-2) = (-1,-1)$$

وتكون :

$$\mathbf{t}_{4,0} = \mathbf{x}_4 + \lambda\mathbf{s} = (-2,-3) + (-1,-1) = (-3,-4)$$

الخطوة ٦

نضع k = 4 ونحسب :

عند i=1

$$f(-3,-4) = -5$$

$$f^+ = f(\mathbf{t}_{4,0} + \Delta x_1 u_1) = f(-2,-4) = -8$$

أي أن :

$$f^+ < f$$

ومن ذلك تكون :

$$\mathbf{t}_{4,1} = (-2,-4)$$

وكذلك فإن :

$$f\left(\mathbf{t}_{4,1}\right) = f(-2,-4) = -14$$

وعند i=2 نجد أن :

$$f^{+} = f\left(\mathbf{t}_{4,1} + \Delta x_2 u_2\right) = f(-2,-3) = -8$$

$$f^{-} = f\left(\mathbf{t}_{4,1} - \Delta x_2 u_2\right) = f(-2,-5) = -6$$

أي أن :

$$f < \min\left(f^{+}, f^{-}\right)$$

وبالتالي فإن :

$$\mathbf{t}_{4,2} = \mathbf{t}_{4,1} = (-2,-4)$$

وحيث إن :

$$f\left(\mathbf{x}_4\right) = f(-2,-3) = f\left(\mathbf{t}_{4,2}\right) = f(-2,-4) = -8$$

لذلك نقوم بعمل حركة استكشافية حول النقطة $\mathbf{x}_4$ بتكرار الخطوة ٣ فنلاحظ أن :

$$\mathbf{t}_{5,0} = \mathbf{x}_4 = (-2,-3)$$

عند $i=1$:

$$f\left(\mathbf{t}_{5,0}\right) = -8$$

$$f^{+} = f\left(\mathbf{t}_{5,0} + \Delta x_1 u_1\right) = f(-1,3) = -7$$

$$f^{-} = f\left(\mathbf{t}_{5,0} - \Delta x_1 u_1\right) = f(-3,-3) = -3$$

وحيث إن $f^{+} > f < f^{-}$ عندئذ نضع $\mathbf{t}_{5,1} = (-2,-3)$ حيث نلاحظ أولاً أن :

$$f(\mathbf{t}_{5,1}) = f(-2,-3) = -8$$

وعند i=2 نجد أن :

$$f^{+} = f(\mathbf{t}_{5,1} + \Delta x_2 u_2) = f(-2,-2) = -6$$

$$f^{-} = f(\mathbf{t}_{5,1} - \Delta x_2 u_2) = f(-2,-4) = -8$$

ومن ذلك نلاحظ أن :

$$f(\mathbf{t}_{4,1}) \le \min(f^{-}, f^{+})$$

وبالتالي يكون $\mathbf{t}_{5,2} = (-2,-3)$ وحيث إن :

$$f(\mathbf{t}_{5,2}) = f(\mathbf{x}_4)$$

فإننا نضع $\mathbf{x}_5 = \mathbf{x}_4$ ثم ننقص أطوال الخطوة إلى $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \frac{1}{2}$

نضع k=5 ونحسب :

$$f(\mathbf{x}_5) = -8$$

الخطوة ٢

$$\mathbf{t}_{5,0} = \mathbf{x}_5 = (-2,-3)$$

الخطوة ٣

عند i=1 :

$$f^{+} = f(\mathbf{t}_{5,0} + \Delta x_1 u_1) = f(-\frac{3}{2},-3) = -\frac{33}{4}$$

ومن هذا يتضح أن :

$$f^{+} < f$$

عندئذ تكون :

$$f\left(\mathbf{t}_{5,1}\right) = -\frac{33}{4} \;\;,\;\; \mathbf{t}_{5,1} = (-\frac{3}{2},-3)$$

وعند i=2 نجد أن :

$$f^{+} = \; f\left(\mathbf{t}_{5,1} + \Delta x_2 u_2\right) = f(-\frac{3}{2},-\frac{5}{2}) = -8$$

$$f^{-} \; = \; f\left(\mathbf{t}_{5,1} - \Delta x_2 u_2\right) = f(-\frac{3}{2},-\frac{7}{2}) = -8$$

وهذا يؤدي إلى أن :

$$f < \min\left(f^{+} \;,\; f^{-}\right)$$

عندئذ نضع :

$$\mathbf{t}_{5,2} = \mathbf{t}_{5,1} = \left(-\frac{3}{2},-3\right) = -\frac{33}{4}$$

نعود الآن إلى تنفيذ الخطوة ٤ ، ولأن $\mathbf{t}_{5,1}$ مختلفة عن $\mathbf{x}_5$ فإن نقطة الأساس :

$$\mathbf{x}_6 = \mathbf{t}_{5,2} = \left(-\frac{3}{2},-3\right)$$

الخطوة ٥

لتعيين اتجاه النمط نحسب :

$$\mathbf{S}=\mathbf{x}_6-\mathbf{x}_5=\left(-\frac{3}{2},-3\right) - (-2,-3) = \left(\frac{1}{2},0\right)$$

$$\mathbf{t}_{6,0} = \mathbf{x}_6 + \lambda\, s = \left(-\frac{3}{2},-3\right) + (\,\frac{1}{2}\;,\,0) = (\;-1\;,\;-3)$$

الخطوة ٦

نضع k=6 ونحسب :

$$f(\mathbf{t}_{6,0}) = f(-1,-3) = -7$$

الآن نكرر الخطوة ٣ فنلاحظ أن:

عند $i = 1$:

$$f^{+} = f\left(\mathbf{t}_{6,0} + \Delta x_1 u_1\right) = f(-\frac{1}{2},-3) = -\frac{17}{4}$$

$$f^{-} = f\left(\mathbf{t}_{6,0} - \Delta x_1 u_1\right) = f(-\frac{3}{2},-3) = -\frac{33}{4}$$

وحيث إن:

$$f^{-} < f < f^{+}$$

عندئذ فإن:

$$\mathbf{t}_{6,1} = \left(-\frac{3}{2},-3\right)$$

ونلاحظ أن:

$$f(\mathbf{t}_{6,1}) = f\left(-\frac{3}{2},-3\right) = -\frac{33}{4}$$

وعند $i=2$:

$$f^{+} = f\left(\mathbf{t}_{6,1} + \Delta x_2 u_2\right) = f(-\frac{3}{2},-\frac{5}{2}) = -8$$

$$f^{-} = f\left(\mathbf{t}_{6,1} - \Delta x_2 u_2\right) = f(-\frac{3}{2},-\frac{7}{2}) = -8$$

إذن:

$$f(\mathbf{t}_{6,1}) < \min\left(f^{+}\ ,\ f^{-}\right)$$

أي أن:

$$\mathbf{t}_{6,2} = \mathbf{t}_{6,1} = \left(-\frac{3}{2},-3\right)$$

وحيث إن:

$$f(\mathbf{x}_6) = f(\mathbf{t}_{6,2}) = -\frac{33}{4}$$

لذلك نقوم بعمل حركة استكشافية حول النقطة $\mathbf{x}_6$.

بتكرار الخطوة ٣ نحصل على

$$\mathbf{t}_{7,0} = \mathbf{x}_6 = \left(-\frac{3}{2}, -3\right) \quad , \quad f(\mathbf{t}_{7,0}) = -\frac{33}{4}$$

عند $i=1$:

$$f^+ = f(\mathbf{t}_{7,0} + \Delta x_1 u_1) = f(-1,-3) = -7$$

$$f^- = f(\mathbf{t}_{7,0} - \Delta x_1 u_1) = f(-2,-3) = -8$$

ومن ذلك نلاحظ أن :

$$f < \min(f^+ \ , f^-)$$

أي أن :

$$\mathbf{t}_{7,1} = \mathbf{t}_{7,0}$$

وعند $i=2$:

$$f^+ = f(\mathbf{t}_{7,1} + \Delta x_2 u_2) = f(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}) = -8$$

$$f^- = f(\mathbf{t}_{7,1} - \Delta x_2 u_2) = f(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}) = -8$$

من ذلك نلاحظ أن :

$$f < \min(f^+ \ , f^-)$$

إذن :

$$\mathbf{t}_{7,2} = \mathbf{t}_{7,1} = \mathbf{t}_{7,0}$$

وحيث إن $f(\mathbf{t}_{7,2}) = f(\mathbf{x}_6)$ أي أن $\mathbf{x}_7 = \mathbf{x}_6$ لذا ننقص أطوال الخطوة إلى :

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \frac{1}{4}$$

الخطوة ٢

حيث إن :

$$\mathbf{t}_{7,0} = \mathbf{x}_7 = \left(-\frac{3}{2},-3\right)$$

نحسب :

$$f(\mathbf{x}_7) = -\frac{33}{4}$$

الخطوة ٣

نحسب الآن f^+ , f^- فنجد أنه عند $i=1$

$$f^+ = f\left(\mathbf{t}_{7,0} + \Delta x_1 u_1\right) = f(-\frac{5}{4},-3) = -\frac{125}{16}$$

$$f^- = f\left(\mathbf{t}_{7,0} - \Delta x_1 u_1\right) = f(-\frac{7}{4},-3) = -\frac{133}{16}$$

$$f^- < f < f^+$$

إذن :

$$f\left(\mathbf{t}_{7,1}\right) = -\frac{133}{16} \quad , \quad \mathbf{t}_{7,1} = \left(-\frac{7}{4},-3\right)$$

وعند $i=2$:

$$f^+ = f\left(\mathbf{t}_{7,1} + \Delta x_2 u_2\right) = f(-\frac{7}{4},-\frac{11}{4}) = -\frac{65}{8}$$

$$f^- = f\left(\mathbf{t}_{7,1} - \Delta x_2 u_2\right) = f(-\frac{7}{4},-\frac{13}{4}) = -\frac{67}{8}$$

$$f^- < f < f^+$$

عندئذ فإن :

$$\mathbf{t}_{7,2} = \left(-\frac{7}{4}, -\frac{13}{4}\right)$$

الخطوة ٤

لأن $\mathbf{t}_{7,2}$ نقطة أساس مؤقتة مختلفة عن $\mathbf{x}_7$ فإن نقطة الأساس

$$\mathbf{x}_8 = \mathbf{t}_{7,2} = \left(-\frac{7}{4}, -\frac{13}{4}\right)$$

الخطوة ٥

نعين الآن اتجاه النمط فنحسب :

$$\mathbf{S} = \mathbf{x}_8 - \mathbf{x}_7 = \left(-\frac{7}{4}, -\frac{13}{4}\right) - \left(-\frac{3}{2}, -3\right) = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$$

وتكون :

$$\mathbf{t}_{8,0} = \mathbf{x}_8 + \lambda \mathbf{s} = \left(-\frac{7}{4}, -\frac{13}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$$
$$= \left(-2, -\frac{7}{2}\right)$$

الخطوة ٦

نضع k=8 نحسب , $f(\mathbf{t}_{8,0}) = -\frac{33}{4}$ ثم نكرر خطوة ٣ .

$$f^+ = f\left(\mathbf{t}_{8,0} + \Delta x_1 u_1\right) = f\left(-\frac{7}{4}, -\frac{7}{2}\right) = -\frac{133}{16}$$

ومن ذلك نلاحظ أن :

$$f^+ < f$$

وبالتالي فإن :

$$\mathbf{t}_{8,1} = \left(-\frac{7}{4},-\frac{7}{2}\right)$$

عند i=2 نجد أن :

$$f^{+} = f\left(\mathbf{t}_{8,0} + \Delta x_2 u_2\right) = f(-\frac{7}{4},-\frac{13}{4}) = -\frac{67}{8}$$

فنلاحظ أن :

$$f^{+} < f$$

وهذا يؤدي بنا إلى أن :

$$\mathbf{t}_{8,2} = \left(-\frac{7}{4},-\frac{13}{4}\right)$$

وحيث إن :

$$f(\mathbf{x}_8) = f(\mathbf{t}_{8,2}) = f\left(-\frac{7}{4},-\frac{13}{4}\right) = -\frac{67}{8}$$

لذا نقوم بعمل حركة استكشافية حول $\mathbf{x}_8$ ، ثم نكرر الخطوة ٣ مرة أخرى.

كذلك حيث إن :

$$\mathbf{t}_{9,0} = \mathbf{x}_8 = \left(-\frac{7}{4},-\frac{13}{4}\right) \quad , \quad f(\mathbf{t}_{9,0}) = -\frac{67}{8}$$

وعند i=1 :

$$f^{+} = f\left(\mathbf{t}_{9,0} + \Delta x_1 u_1\right) = f(-\frac{3}{2},-\frac{13}{4}) = -\frac{131}{16}$$

$$f^{-} = f\left(\mathbf{t}_{9,0} - \Delta x_1 u_1\right) = f(-2,-\frac{13}{4}) = -\frac{131}{16}$$

ومن ذلك نلاحظ أن :

$$f < \min\left(f^{+} , f^{-}\right)$$

ونلاحظ أن :

$$\mathbf{t}_{9,1} = \mathbf{t}_{9,0}$$

الآن بوضع i=2 نجد أن :

$$f^+ = f\left(\mathbf{t}_{9,1} + \Delta x_2 u_2\right) = f(-\frac{7}{4},-3) = -\frac{133}{16}$$

$$f^- = f\left(\mathbf{t}_{9,1} - \Delta x_2 u_2\right) = f(-\frac{7}{4},-\frac{7}{2}) = -\frac{133}{16}$$

وهذا يعني أن :

$$f < \min\left(f^+ , f^-\right)$$

وبالتالي فإن :

$$\mathbf{t}_{9,2} = \mathbf{t}_{9,1} = \mathbf{x}_8$$

يمكن إنقــــاص طول الخطوة إلى $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \frac{1}{8}$ وبذلك تكون شـــــروط التوقف قد تحققت . لذا فإن $x^* = \left(-\frac{7}{4},-\frac{13}{4}\right)$ وتكون قيمة الدالة عند هذه النقطة هي :

$$f\left(x^*\right) = f\left(-\frac{7}{4},-\frac{13}{4}\right) = -\frac{67}{8}$$

ملاحظة

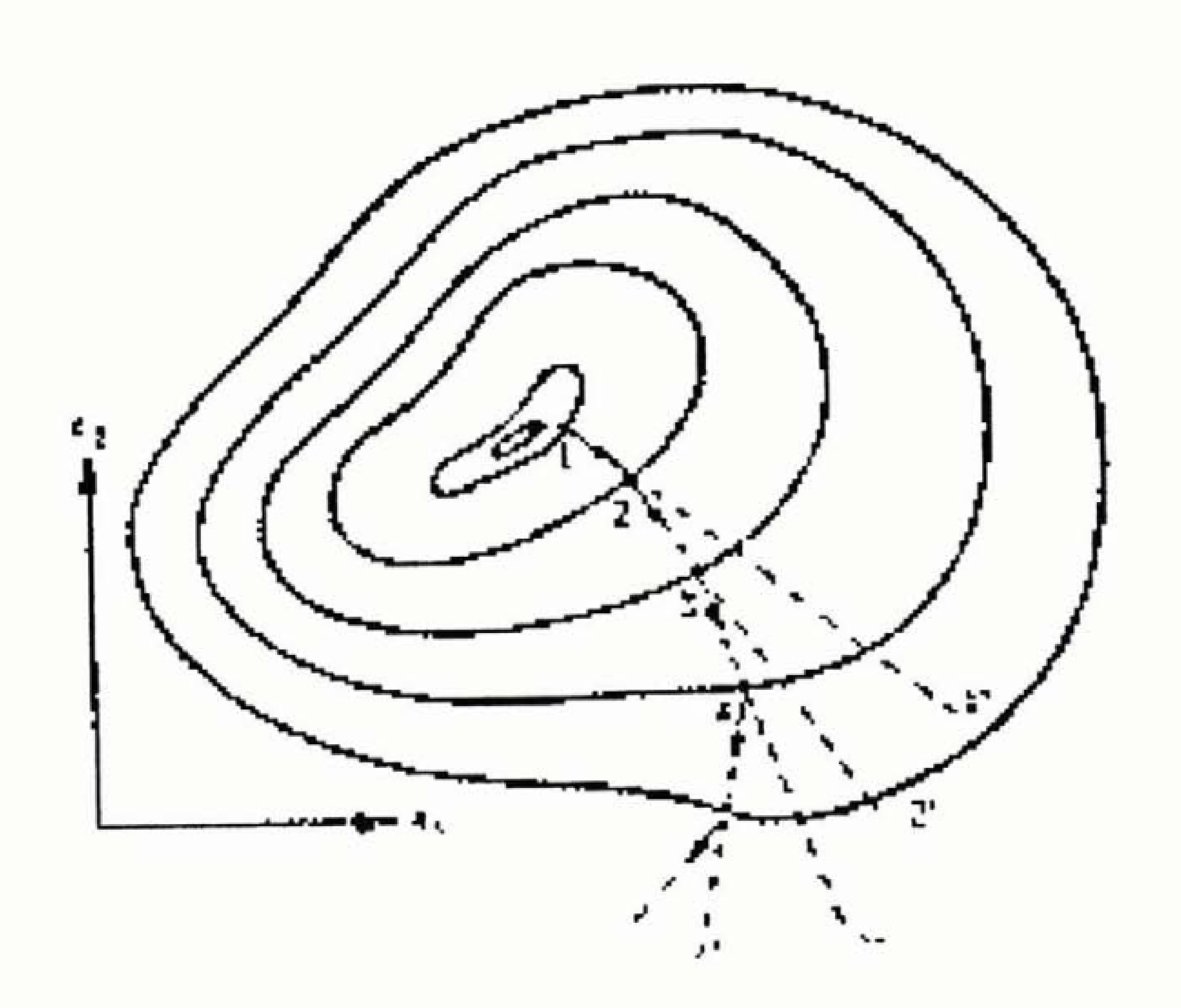
يمكن إجراء الخطوات بطريقة تتابعية دون الإشارة إلى الخطوات بأرقامها التي أشرنا إليهافي شرح طريقة الحل واتبعناها في حل المثالين السابقين ، وقد كان ذكرُنا لها وتأكيدنا عليها بغرض تبسيط اتباع خطوات الخوارزمية عند كتابة برنامج حاسب آلي لحساب القيمة المثلى التي تجعل الدالة أصغر أو أكبر ما يمكن ضمن مجال أو فترة تقريبية محددة ، كما أن الخطوات تزيل اللبس على القارئ ، وتبسّط الإجراءات وتوضّح الترتيب عند الانتقال من مرحلة إلى أخرى .

(٤,٣,٢) الطرق الانحدارية

تعتمد الطرق الانحدارية (descent methods)على المتجه المتدرج للدالة $f(\mathbf{x})$ وذلك لإيجاد اتجاه البحث عن النقطة المثلى، والمتجه المتدرج هو متجه المشتقات الجزئية للدالة $f(\mathbf{x})$ بالنسبة إلى n متغير يسمى بانحدار الدالة ∇f حيث

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} , \frac{\partial f}{\partial x_2} , \dots , \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

المقدار ∇f هو متجه له n مركبة وله خاصية مهمة جداً وهي إذا تحركنا في هذا الاتجاه من أي نقطة في الفراغ النوني فإن قيمة الدالة تزداد بمعدل سريع، ولذا فإن الاتجاه الانحداري يسمى اتجاه ميل الصعود الأقصى (steepest ascent)، تجدر الملاحظة أن اتجاه الصعود الأقصى له خاصية موضعية (local)، وليست شاملة(global). الشكل (٤,٢) يوضح اتجاه الصعود الأقصى.



الشكل رقم (٤,٢). اتجاه الصعود الأقصى.

لاحظ أن المتجــه المتدرج، محســوب عنـد النقطة 1 ,2 ,3 ,4 التي تقع على الاتجاهات `11 ,`22 ,`33 ,`44 على الترتيب.

لذا فإن قيمة الدالة تزداد بأسرع معدل في الاتجاه `11 عند النقطة 1 ولكن ليس عند النقطة 2، وبالتشابه فإن قيمة الدالة تزداد بأسرع معدل في الاتجاه (`33)`22 عند النقطة (3)2 ، ولكن ليس عند النقطة (4)3.

من ذلك نستطيع القول بأن اتجاه الصعود الأقصى - يتغير بصفة عامة - من نقطة إلى نقطة أخرى، وإذا أجرينا عدداً لا نهائيا من التحركات الصغيرة في اتجاه الصعود الأقصى، فإن المسار سوف يكون خطا منحنيا مثل المنحنى 1234 .

إذا كان الاتجاه الانحداري الموجب يمثل اتجاه الصعود الأقصى، فإن الاتجاه الانحداري السالب يمثل اتجاه النزول الأقصى. والجدير بالذكر أنه من المتوقع أن أي طريقة تستخدم الاتجاه الانحداري تعطي نقطة التصغير أسرع من تلك التي لا تستخدم الاتجاه الانحداري. كما يلاحظ أن كل طرق النزول الأقصى تستخدم في إيجاد بحث المتجه المتدرج بطريقة مباشرة أو غير مباشرة.

(١,٢,٣,٤) خوارزمية أقصى ميل نزول

يمكــن تلخيــص الخطــوات التكــرارية لخـــوارزميــة أقـصى مـيل نزول (steepest descent) كما في الخطوات التالية:

١- نختار متجهاً أولياً $\mathbf{x}_1$ وتفاوتا صغيرا $\varepsilon > 0$ ثم نضع $k=1$.

٢- نحسب $\mathbf{s}_k = -\nabla f(\mathbf{x}_k)$. إذا كان $\|s\| < \varepsilon$ تتوقف، وإلا ننفذ الخطوة ٣

٣- نجد طول الخطوة الأمثل λ_k^* وذلك بحل مسألة التصغير ذات المتغير الواحد

$$\underset{\lambda}{\text{Min.}} \left\{ f\left(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{S}_k\right) \right\}$$

بشرط أن تكون: $\lambda_k^* \geq 0$

نحسب $x_{k+1} = x_k + \lambda_k^* s_k$ ونضع $k=k+1$ ونعود إلى الخطوة ٢.

يمكن إجراء ذلك باستخدام أي من الطرق التي ذكرت في الفصل الثالث أو أي طريقة أخرى مناسبة.

٤- نتوقف إذا تحقق أحد شروط التقارب. وإلا فنضع $k=k+1$ وننتقل إلى الخطوة الثانية.

(٢,٢,٣,٤) خوارزمية أقصى ميل صعود

تختلف خوارزمية أقصى ميل صعود (steepest ascent algorithm) عن خوارزمية أقصى ميل نزول في كونها تستخدم الاتجاه الانحداري الموجب في إيجاد اتجاه البحث. وتتلخص خطواتها التكرارية في الآتي:

١- نختار متجهاً أولياً $\mathbf{x}_1$ وتفاوتا (tolerance) في حدود ε ثم نضع $k=1$.

٢- نحسب $\mathbf{S}_k = \nabla f(\mathbf{x}_k)$.

٣- نوجد طول الخطوة الأمثل وذلك بحل مشكلة التكبير ذات المتغير الواحد

$$\underset{\lambda}{\text{Max.}} \left\{ f\left(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{S}_k\right) \right\}$$

٤- نتوقف إذا تحقق أحد شروط التقارب التي نحددها فيما بعد، ونضع $k=k+1$ وننتقل إلى الخطوة الثانية.

(٣,٢,٣,٤) معايير أخرى للتقارب

أشهر ثلاثة معايير للتقارب (convergence criterion) التي تستخدم إحداها للتوقف عن تكرار خطوات الحل نذكرها فيما يلي:

$$(1)\quad \left|\frac{f(\mathbf{x}_{i+1}) - f(\mathbf{x}_i)}{f(\mathbf{x}_i)}\right| \le \varepsilon$$

$$(2)\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \le \varepsilon \qquad , \quad i=1,2,\dots,n$$

$$(3)\quad \left\|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i\right\| < \varepsilon$$

حيث إن التفاوت ε مقدار صغير موجب يحدد مسبقاً.

ملاحظة

يمكن استخدام خوارزمية أقصى ميل نزول في إيجاد الحل الأمثل لمسألة تكبير دالة $f(\mathbf{x})$ وذلك بإيجاد الحل الأمثل لتصغير الدالة $-f(\mathbf{x})$ - وليكن $\mathbf{x}^*$ فتكون $f(\mathbf{x}^*)$ هي القيمة العظمى للدالة $f(\mathbf{x})$.

مثال (٤,٧)

أوجد النقطة التي تكون عندها الدالة التالية

$$f(x_1\ , x_2) = x_1 - x_2 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

أصغر ما يمكن متخذاً نقطة بحث مبدئية $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ ، وتفاوتا $\varepsilon = 0.05$.

الحل

لإيجاد النقطة المثلى في هذا المثال، نعيد طريقة الحل بعدة تكرارات حتى نصل إلى شرط التوقف.

تكرار ١ : الاتجاه المتدرج للدالة f هو :

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} , \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = \left(1 + 4x_1 + 2x_2 , -1 + 2x_1 + 2x_2 \right)$$

وبالتالي تكون :

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(0,0) = (1,-1)$$

$$s_1 = -\nabla f(\mathbf{x}_0) = (-1,1)$$

لإيجاد $\mathbf{x}_1$ نوجد طول الخطوة الأمثل λ_1^* وذلك بتصغير الدالة $f(\mathbf{x}_0 + \lambda_1 \mathbf{S}_1)$ بالنسبة للمتغير λ_1 حيث إن :

$$f(\mathbf{x}_1 + \lambda_1 \mathbf{S}_1) = f(-\lambda_1 , \lambda_1) = \lambda_1^2 - 2\lambda_1$$

ويكون تصغير هذه الدالة بوضع $\frac{df}{d\lambda_1} = 0$ ، وبحل المعادلة الناتجة نحصل على $\lambda_1^* = 1$ ومن ذلك تكون :

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + \lambda_1^* \mathbf{S}_1 = (0,0) + 1(-1,1) = (-1,1)$$

وحيث إن :

$$\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| > \varepsilon$$

لذلك نلاحظ أنه لا يتحقق شرط التوقف ولذا نجري تكراراً آخر .

تكرار ٢

$$\mathbf{s}_2 = -\nabla f(\mathbf{x}_1) = -\nabla f(-1,1) = (1,1)$$

والآن نقوم بتصغير الدالة :

$$f(\mathbf{x}_2 + \lambda_2 \mathbf{S}_2) = f(-1+\lambda_2 , 1+\lambda_2) = 5\lambda_2^2 - 2\lambda_2 - 1$$

وذلك بوضع $\frac{df}{d\lambda_2} = 0$ أي أن $10\lambda_2 - 2 = 0$

وبحل هذه المعادلة تكون قيمة $\lambda_2^* = \frac{1}{5}$ ومن ذلك نجد أن :

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2 + \lambda_2^* \mathbf{S}_2 = (-1,1) + 0.2(1,1) = (-0.8,1.2)$$

لاحظ أن :

$$\left\| \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \right\| > \varepsilon$$

أي أن شرط التوقف لم يتحقق بعد ، وبالتالي نجري تكراراً آخر .

تكرار ٣

نوجد قيمة $\mathbf{S}_3$ فيكون :

$$\mathbf{S}_3 = -\nabla f(\mathbf{x}_2) = -\nabla f(-0.8,1.2) = (0.2,0.2)$$

ومن ذلك نجد أن :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{S}_3) &= f(-0.8-0.2\lambda_3, 1.2+0.2\lambda_3) \\ &= 0.04\lambda_3^2 - 0.08\lambda_3 - 1.2 \end{aligned}$$

لتصغير هذه الدالة نضع $\frac{df}{d\lambda_3} = 0$ وبحل المعادلة الناتجة نحصل على

$$\lambda_3^* = 1.0$$

مما سبق نجد أن $\mathbf{x}_4$ التالية هي :

$$\mathbf{x}_4 = \mathbf{x}_3 + \lambda_3^* \mathbf{S}_3 = (-0.8,1.2) + 1.0(-0.2,0.2) = (-1.0,1.4)$$

وحيث إن :

$$\left| \mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_3 \right| > \varepsilon$$

لذا يجب أن نستمر في عمل التكرارات حتى نصل إلى $\mathbf{x}^* = (-1\ ,\ 1.5)$ وهي النقطة التي تكون عندها للدالة نهاية صغرى .

في المثال التالي نوضح كيفية تقدم عملية الحل بتعاقب التكرارات وحتى الاقتراب من الحل الأمثل . سنوضح كذلك أن عدد التكرارات اللازم إجراؤها

للوصول إلى الحل الأمثل يعتمد على التفاوت في الدقة المسموح بها عن الحل الأمثل.

مثال (٤,٨)

استخدم طريقة أقصى ميل صعود في إيجاد القيمة العظمى للدالة:

$$f(x_1 , x_2) = 2x_1x_2 + 2x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$$

بفرض أن نقطة البحث المبدئي هي $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$.

الحل

نجد أولاً الانحدار للدالة **f** حيث إن:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (2x_2 - 2x_1 \ , 2x_1 + 2 - 4x_2)$$

$$\mathbf{S}_1 = \nabla f(\mathbf{x}_1) = (0,2)$$

من ذلك يكون:

$$f(\mathbf{x}_1 + \lambda_1 \mathbf{S}_1) = f(0+0\lambda_1 \ , 0+2\lambda_1) = 4\lambda_1 - 8\lambda_1^2$$

بوضع $\frac{df}{d\lambda_1} = 0$ نجد أن $\lambda_1^* = \frac{1}{4}$

ومن ذلك تكون نقطة الحل التالية هي:

$$\mathbf{x}_2 = (0,0) + \frac{1}{4}(0,2) = \left(0 \ , \frac{1}{2}\right)$$

تكرار ٢

نوجد الاتجاه المناظر للنقطة $\mathbf{x}_1$ حيث إن:

$$\mathbf{S}_2 = \nabla f\left(0, \frac{1}{2}\right) = (1,0)$$

$$f(\mathbf{x}_2 + \lambda_2 \mathbf{S}_2) = f\left(\lambda_2, \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(2\lambda_2) + 2\left(\frac{1}{2}\right) - \lambda_2^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \lambda_2 - \lambda_2^2 + \frac{1}{2}$$

عند وضع $\frac{df}{d\lambda_2} = 0$ نجد أن $\lambda_2^* = \frac{1}{2}$ ومن ذلك تكون :

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2 + \lambda_2^* \mathbf{S}_2 = \left(0, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}(1,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

وبالاستمرار في عمل هذه التكرارات نحصل على نقط حل أخرى عند :

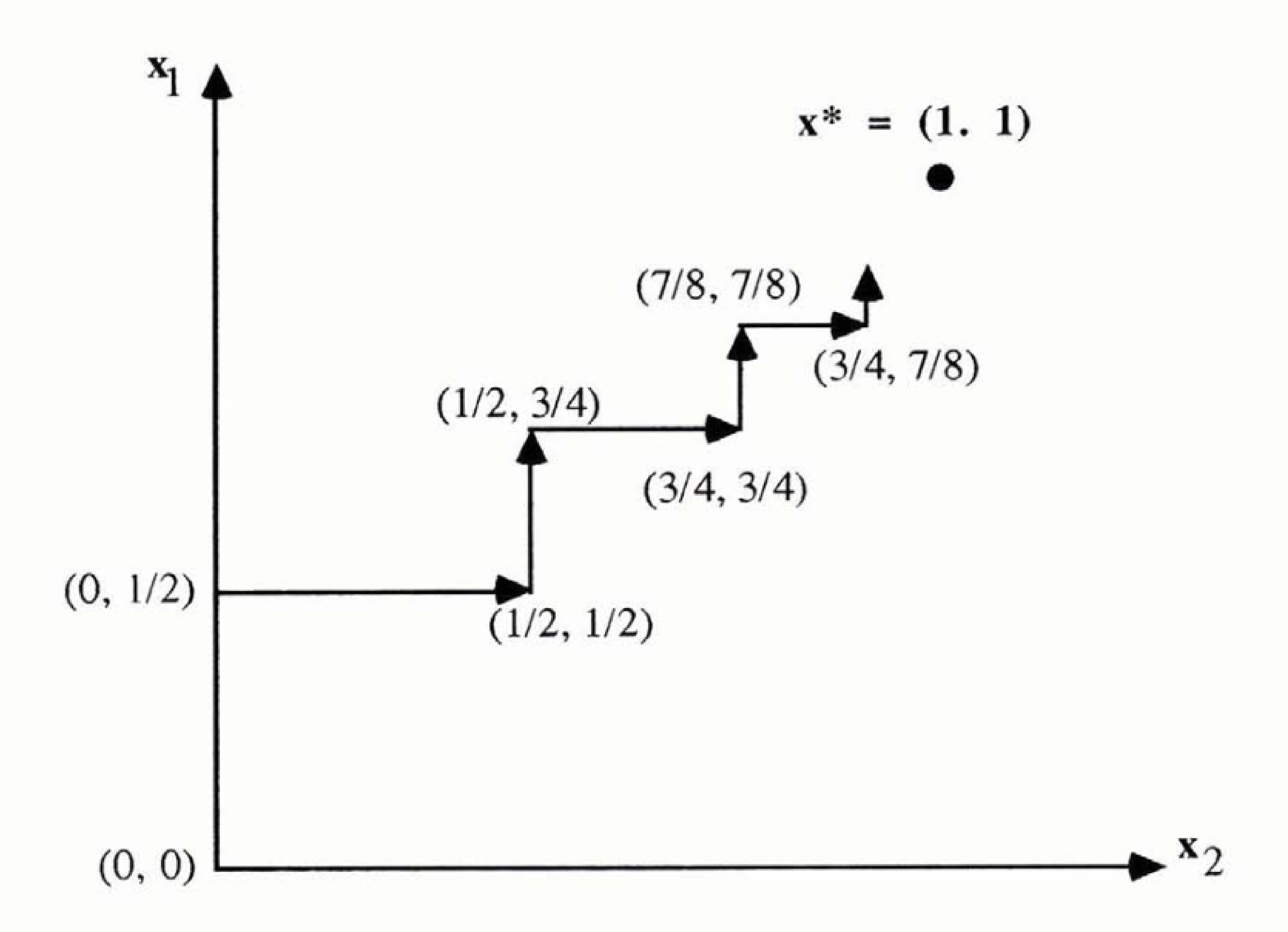
$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right), \left(\frac{7}{8}, \frac{7}{8}\right), \ldots,$$

كما هو موضح بالشكل (٣ , ٤).

نلاحظ أن هذه النقط تتقارب إلى $x^* = (1, 1)$ الذي يمثل الحل الأمثل حيث إنه يحقق :

$$\nabla f(1,1) = (0,0)$$

من المعروف أن متتابعة الحلول المعطاة لا تصل إلى الحل الأمثل المضبوط (exact) لذا فإن عملية إجراء التكرارات تتوقف عندما نصل إلى نقطة قريبة من نقطة الحل الأمثل المضبوط و يتوقف هذا على اختيار مقدار التفاوت ε المسموح به .



الشكل رقم (٣,٤).

(٤,٤) تمـــــــارين

١- ادرس وضع الدوال الآتية من حيث وجود نقاط طرفية :

(i) $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$

(ii) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6(x_1 + x_2 + x_3) + 2x_1x_2x_3$

٢- تحقق من أن للدالة :

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2x_3 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 4x_2 + 4x_3$$

نقط استقرار عند :

$$(0,3,1)\ ,\ (0,1,-1)\ ,\ (1,2,0)\ ,\ (2,1,1)\ ,\ (2,3,-1)$$

واستخدم في ذلك الشروط الضرورية لإيجاد النقط الطرفية .

٣- إذا كان العائد الناتج لكل فدان في مزرعة من أحد المحاصيل يعطى بالدالة التالية :

$$f(x_1,x_2) = 20x_1 + 26x_2 + 4x_1x_2 - 4x_1^2 - 3x_2^2$$

حيث x_1 تمثل تكاليف العمالة ، x_2 تمثل تكاليف التسميد . أوجد أقصى عائد للفدان .

٤- حدد النقط الطرفية للدالة :

$$f(x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3) \ = \ x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - x_2x_3 + 4x_1 + 12$$

٥- ابحث ، فيما إذا كان للدالة التالية نقطة أو نقط طرفية :

$$f(x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3) \ = \ x_1^4 + 6x_1^2x_2^2 + x_1x_2^2 - 6x_1x_3^2 - x_2x_3 + 4x_3^2$$

٦- أوجد قيم x_3, x_2, x_1 التي تجعل الدالة :

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + 6x_1^2x_2^2 - 6x_1x_3^2 - x_2x_3 + 4x_3^2$$

أصغر ما يمكن

٧- استخدم بحث نمط هوك – جيفز في تكبير الدالة :

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1+2x_2+x_3-0.02\left(x_1^4+x_2^4+x_3^4-325\right)^2-0.02\left(x_1x_2\right)^2$$

على أن تكون نقطة البحث المبدئي $\mathbf{x}_1 = (0, 0, 0)$ وأطوال الخطوات لمتغيراتها الثلاثة هي $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 1$

٨- استخدم بحث نمط هوك - جيفز لتصغير الدالة :

$$f(x_1 , x_2 , x_3) = 5x_1^2 - 16x_1x_2 + 13x_2^2 + 10x_1 - 16x_2$$

مـتـخـذاً $x_0 = (0 , 0)$ كنقطة بداية وأطوال الخطوتين المبـدئيـتين همـا $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 2$ وأن يكون $\Delta x_1 = \Delta x_2 < 1$ شرط التوقف. كرر الحسابات مستخدماً $x_0 = (4 , 2)$، ثم علق على النتيجة التي تحصل عليها من نقطتي البداية.

٩- باستخدام بحث نمط هوك - جيفز أوجد القيمة الصغرى للدالة :

$$f(x_1 , x_2 , x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2$$

وذلك بأخذ $\mathbf{x}_1 = (2, -1, 1)$ كنقطة بداية وأطوال خطوات مبدئية

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0.5$$

١٠- باستخدام طريقة أقصى ميل نزول أوجد القيمة الصغرى للدالة :

$$f(\mathbf{x}) = 4x_1^4 + x_2^2 - 4x_1x_2 + 5x_2$$

مستخدماً نقطة الأصل كنقطة بداية وبتفاوت $\in = 0.05$

١١- أوجد القيمة الصغرى للدالة :

$$f(x_1 , x_2) = 2x_1^2 + x_2^2$$

بطريقة أقصى ميل نزول مستخدماً نقطة بداية $(1, 2)$ وشرط توقف مناسب.

١٢-أوجد القيمة الصغرى للدالة :

$$f(x_1 , x_2) = (x_1 - 3)^2 + 9(x_2 - 5)^2$$

بطريقـة أقصى ميل نزول مـسـتخدماً نقطة بداية $x_0 = (1 , 1)$ وباختيـار شرط توقف مناسب.

١٣- باستخدام إحدى الطرق الانحدارية أوجد القيمة العظمى للدالة :

$$f(\mathbf{x}) = 10x_1 - 2x_1^2 - 4x_2 + 5 \text{ Log } x_2$$

مبتدئاً بنقطة (1,2) .

١٤- أوجد القيمة العظمى للدالة :

$$f(\mathbf{x}) = -x_1^2 + 4x_1 + 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

مبتدئاً من النقطة $x_0 = (0 , 0)$ وذلك باستخدام إحدى طرق البحث التي تعتمد على الميل الانحداري .



الفصل الخامس

المسائل المقيدة بمعادلات

• مقدمة • طريقة التعويض المباشر • طريقة تغيير القيود • طريقة مضاريب لاجرانج • تمارين

(٥,١) مقدمة

يتعرض هذا الفصل لإيجاد الحلول المثلى لمسائل برمجة الطرق المقيدة بقيود على هيئة معادلات أو قيود المساواة (constrained problems with equality constraints) التي تكون فيها الدوال متصلة وتأخذ صيغاً رياضية معينة .

تكون الصيغة العامة لهذه المسائل هي عبارة عن إيجاد قيم $x_1 , x_2, \ldots , x_n$ التي تعظم (أو تصغر) دالة الهدف :

$$z = f(\mathbf{x}) = f\left(x_1 , x_2 , \ldots , x_n\right) \qquad (٥,١)$$

وذلك تحت الشروط :

$$g_j(\mathbf{x}) = 0 \quad , \quad (j = 1 , 2 , \dots , m) \qquad (٥ , ٢)$$

حيث إن قيمة m أقل من n أو تساويها ، وكل من m , n أعداد صحيحة موجبة . في حالة كون m=0 تصبح المسألة غير مقيدة ، وقد سبق لنا دراستها في الفصل الرابع ، وتكون المسألة غير معرفة إذا كانت m أكبر من n .

توجد عدة طرق لحل مثل هذه المسألة ، وسوف نشرح بعضاً منها في البنود القادمة من هذا الفصل ، وهي طريقة التعويض المباشر ، وطريقة تغيير القيود ، وطريقة مضاريب لاجرانج .

(٥ , ٢) طريقة التعويض المباشر

تعْتبر طريقة التعويض المباشر (direct substitution method) من أبسط الطرق لحل مسائل البرمجة غير الخطية المقيدة بشروط المساواة . لاحظنا أنه يوجد في المسألة غير المقيدة عدد n من المتغيرات . وإذا كانت المسألة تحتوي على عدد m من الشروط ، فهذا يعني أنها تحتوي على (n-m) من المتغيرات المستقلة . يمكن إيجاد قيم المتغيرات غير المستقلة والتي عددها m بحل مجموعة القيود آنيا ، وبالتالي نحصل على قيم جميع المتغيرات التي تحقق الحل الأمثل للدالة .

لتوضيح طريقة التعويض المباشر لحل هذا النوع من المسائل نورد الأمثلة التالية .

مثال (٥ , ١)

أوجد أبعاد الصندوق التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن ، بحيث يمكن وضعه في كرة نصف قطرها الوحدة .

الحل

لإيجاد الحل الأمثل لهذه المسألة، نفرض أن نقطة أصل أو التقاء المحاور الكارتيزية هي مركز الكرة، وهي في الوقت نفسه مركز الصندوق؛ أي أن حجم الصندوق يعطى بالمعادلة:

$$f(x_1 , x_2 , x_3) = 8\, x_1\, x_2\, x_3 \qquad (٥,٣)$$

علماً بأن أركان الصندوق تشترك في نقط مع سطح الكرة التي نصف قطرها الوحدة.

نلاحظ أن أي نقطة مشتركة إحداثياتها x_1 , x_2 , x_3 بين الكرة والصندوق لابد وأن تحقق العلاقة التالية:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \qquad (٥,٤)$$

تحتوي هذه المسألة على ثلاثة متغيرات وقيد (أو شرط) مساواة واحد. باستخدام هذا القيد، يمكن حذف أي من المتغيرات في دالة الهدف؛ فمثلاً إذا اخترنا حذف x_3 من المعادلة (٥,٤) نجد أن:

$$x_3 = \left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (٥,٥)$$

وبالتالي تصبح دالة الهدف هي:

$$f(x_1 , x_2) = 8\, x_1\, x_2 \left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (٥,٦)$$

أي أن المسألة تحولت إلى مسألة إيجاد القيمة العظمى للدالة $f(x_1 , x_2)$ في متغيرين وهي مسألة لا تحتوي على شروط. تصبح الشروط الضرورية من أجل إيجاد القيمة العظمى للدالة $f(x_1 , x_2)$ هو وضع مشتقتي $f(x_1 , x_2)$ الجزئيتين بالنسبة لكل من x_2 , x_1 تساوي صفراً، أي أن:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 8\, x_2 \left[\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{x_1^2}{\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right] = 0 \qquad (٥,٧)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 8\, x_1 \left[\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{x_2^2}{\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right] = 0 \qquad (٥,٨)$$

بتبسيط المعادلتين (٥,٧) و (٥,٨)، نحصل على:

$$1 - 2x_1^2 - x_2^2 = 0$$

$$1 - x_1^2 - 2x_2^2 = 0$$

وبحل المعادلتين السابقتين نحصل على:

$$x_1^* = x_2^* = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ومن العلاقة (٥,٥) نجد أن $x_3^* = \frac{1}{\sqrt{3}}$ وهذا الحل يعطي أكبر حجم للصندوق وهو:

$$f(\mathbf{x}^*) = \frac{8}{3\sqrt{3}}.$$

لمعرفة ما إذا كان الحل مناظراً لأكبر قيمة وليس لأصغر قيمة، نطبق الشروط الكافية على الدالة $f(x_1, x_2)$. فمن المعادلة (٥,٦) يمكن الحصول على المشتقات الجزئية ذات الرتبة الثانية للدالة f عند (x_1^*, x_2^*) و تعطى كما يلي:

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = -\frac{8x_1 x_2}{\left(1-x_1^2-x_2^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{8x_2}{\left(1-x_1^2-x_2^2\right)} \cdot \left[\frac{x_1^3}{\left(1-x_1^2-x_2^2\right)^{\frac{1}{2}}} + 2x_1\left(1-x_1^2-x_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

أي أن:

$$\frac{\partial^2 f\left(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right)}{\partial x_1^2} = -32\sqrt{3}$$

المقصود بهذه العلاقة هو إيجاد قيمة المشتقة الثانية للدالة بالنسبة للمتغير x_1 عند النقطة $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 8\left(1-x_1^2-x_2^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{8x_2^2}{\left(1-x_1^2-x_2^2\right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{8x_1^2}{\left(1-x_1^2-x_2^2\right)}\left[\left(1-x_1^2-x_2^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{x_2^2}{\left(1-x_1^2-x_2^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

أي أن:

$$\frac{\partial^2 f(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{-16}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{-8x_1 x_2}{\left(1-x_1^2-x_2^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{8x_1}{\left(1-x_1^2-x_2^2\right)}\left[\frac{x_2^3}{(1-x_1^2-x_2^2)^{\frac{1}{2}}} + 2x_2(1-x_1^2-x_2^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

أي أن:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\left(1/\sqrt{3}\ ,\ 1/\sqrt{3}\right) = -32\sqrt{3}$$

وحيث إن مصفوفة هس المناظرة لهذه الدالة هي:

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

وبالتالي فإن قيمتي المحددتين الجزئيتين أو الفرعيتين لهذه الدالة هما:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} < 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2}\right)^2 > 0$$

فإن مصفوفة هس للدالة f تكون سالبة مؤكدة، ولذا فإن الدالة $f(x_1\ ,\ x_2)$ تكون أكبر ما يمكن عند النقطة $(x_1^*\ ,\ x_2^*)$ أي أن حجم الصندوق يكون أكبر ما يمكن عند النقطة (x_1^*, x_2^*, x_3^*).

ملاحظة

لأن كلا من دالة الهدف ومعادلة القيد متماثلتان في $x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3$ بمعنى أن استبدال أيهما مكان الآخر لا يغير من صيغة الدالة أو القيد- يجب أن نتوقع ابتداء أن تكون قيم الحل الأمثل هي $x_1^* = x_2^* = x_3^*$.

وحيث إن $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ ، فإن قيمة كل منهما يجب أن تساوي $\frac{1}{\sqrt{3}}$، كما أن معرفة المشتقة $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ تعيّن مباشرة $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ (باستبدال x_2 محل x_1)، وكذلك $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ باستبدال x_3 محل x_1.

أي أن :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\left(1/\sqrt{3}\ ,\ 1/\sqrt{3}\right) = -32\sqrt{3}$$

وحيث إن مصفوفة هس المناظرة لهذه الدالة هي :

$$H_f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

وبالتالي فإن قيمتي المحددتين الجزئيتين أو الفرعيتين لهذه الدالة هما :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} < 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2}\right)^2 > 0$$

فإن مصفوفة هس للدالة f تكون سالبة مؤكدة، ولذا فإن الدالة $f\left(x_1\ ,\ x_2\right)$ تكون أكبر ما يمكن عند النقطة $\left(x_1^*\ ,\ x_2^*\right)$ أي أن حجم الصندوق يكون أكبر ما يمكن عند النقطة $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*\right)$.

ملاحظة

لأن كلا من دالة الهدف ومعادلة القيد متماثلتان في $x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3$ بمعنى أن استبدال أيهما مكان الآخر لا يغير من صيغة الدالة أو القيد- يجب أن نتوقع ابتداء أن تكون قيم الحل الأمثل هي $x_1^* = x_2^* = x_3^*$.

وحيث إن $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ ، فإن قيمة كل منهما يجب أن تساوي $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ،

كما أن معرفة المشتقة $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ تعيّن مباشرة $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ (باستبدال x_2 محل x_1)، وكذلك $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ باستبدال x_3 محل x_1.

و الشيء نفسه ينطبق على المشتقات من الرتبة الثانية .

ولا شك أن هذا سيوفر الكثير من الحسابات .

تجدر الإشارة كذلك في مثل هذا التطبيق ألا يتوقع الشرط الكافي لأن النقطة $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*\right)$ لايمكن أن تكون نهاية صغرى لأن الحجم الأصغر لابد أن يكون صفراً وذلك عندما $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

مثال (٢ , ٥)

أوجد القيمة الصغرى للدالة :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) \qquad (٥ , ٩)$$

تحت الشروط :

$$x_1 - x_2 = 0 \qquad (٥ , ١٠)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \qquad (٥ , ١١)$$

الحل

تحتوي هذه المسألة على ثلاثة متغيرات وشرطين، أي أن لدينا متغيراً مستقلاً ومتغيرين غير مستقلين. من الشرط (١٠ , ٥) نجد أن :

$$x_1 = x_2$$

وبالتالي فيمكن حذف المتغير x_1 أو x_2 من دالة الهدف والشرط (١١ , ٥).

بحذف x_2 تتحول المسألة إلى تصغير الدالة :

$$f(x_1, x_3) = \frac{1}{2}\left(2x_1^2 + x_3^2\right) \qquad (٥ , ١٢)$$

تحت الشرط :

$$2x_1 + x_3 = 1 \qquad (٥ , ١٣)$$

بحذف المتغير x_3 باستخدام الشرط (١٣ , ٥) ، نجد أن :

$$x_3 = 1 - 2x_1$$

وبالتالي تصبح دالة الهدف هي :

$$f(x_1) = \frac{1}{2}\left(1 - 4x_1 + 6x_1^2\right)$$

وبذلك أصبحت المسألة مسألة تصغير غير مشروطة تحتوي على متغير واحد .

يكون الشرط الضروري لكي تكون الدالة $f(x_1)$ نقطة طرفية أو حدية بوضع مشتقة الدالة f تساوي صفراً؛ أي أن :

$$\frac{df}{dx_1} = \frac{1}{2}\left(-4 + 12x_1\right) = 0 \qquad (٥ , ١٤)$$

من المعادلة السابقة نجد أن $x_1 = \frac{1}{3}$ وبالتعويض في الشرطين (١٠ , ٥) و (١١ , ٥) نحصل على :

$$x_2 = x_3 = \frac{1}{3}$$

لذا تكون النقطة الحدية هي $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ، وبتطبيق الشروط الكافية لمعرفة ما إذا كان للدالة f عند x_1^* نهاية صغرى أو نهاية كبرى نحسب $\frac{d^2f}{dx_1^2}$ من المعادلة (١٤ , ٥) ونعوض بقيمة x_1^* التي كانت $\frac{d^2f}{dx_1^2} = 6 > 0$ ؛ أي أن النقطة الحدية $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ نقطة نهاية صغرى للدالة $f(x_1, x_2, x_3)$.

ملاحظة

لأن دالة الهدف ومعادلة القيد متماثلتان في x_1, x_2, x_3 ؛ بمعنى أن استبدال أيهما مكان الآخر لا يغير من صيغة الدالة أو القيد، لذا يجب أن نتوقع ابتداء

أن تكون قيم الحل الأمثل هي $x_1^* = x_2^* = x_3^*$.

وحيث إن $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ فإن قيمة كل منهما يجب أن تساوي $\frac{1}{3}$ ، كما أن معرفة المشتقة $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ تعين مباشرة $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ (باستبدال x_2 محل x_1)، وكذلك $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ باستبدال x_3 محل x_1.

ونفس الشيء ينطبق على المشتقات من الرتبة الثانية.

ولا شك أن هذا سيوفر الكثير من الحسابات.

كذلك تجدر الإشارة في مثل هذا التطبيق، إلى توقع الشرط الكافي لأن النقطة $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*\right)$ لايمكن أن تكون نهاية صغرى لأن الدالة لابد أن تكون صفراً وذلك عندما $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

مثال (٥,٣)

أوجد القيمة الصغرى للدالة:

$$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \qquad (٥,١٥)$$

تحت الشرط:

$$x_1x_2 - 10 = 0 \qquad (٥,١٦)$$

الحل

تحتوي هذه المسألة على متغيرين وقيد واحد، أي أن لدينا متغيرا مستقلا وآخر غير مستقل (أي معتمد) ومن الشرط (٥,١٦) نجد أن $\mathbf{x}_i \neq 0$ لقيم $i=1,2$ وأن:

$$x_2 = \frac{10}{x_1} \qquad (٥,١٧)$$

وبحذف المتغير x_2 من دالة الهدف نحصل على:

$$f(x_1) = 5x_1^2 + \left(\frac{10}{x_1}\right)^2 + 2x_1\left(\frac{10}{x_1}\right)$$

أي أن :

$$f(x_1) = 5x_1^2 + \frac{100}{x_1^2} + 20 \qquad (٥,١٨)$$

وبالتالي تحولت المسألة من مسألة مقيدة ذات متغيرين وقيد واحد، إلى مسألة غير مقيدة بمتغير واحد.

يكون الشرط الضروري لكي تكون للدالة $f(x_1)$ نقطة طرفية (أو حدية) هو أن تكون مشتقة الدالة f بالنسبة إلى $\mathbf{x}_1$ تساوي صفراً، أي أن

$$\frac{df}{dx_1} = 10x_1 - \frac{200}{x_1^3} = 0 \qquad (٥,١٩)$$

من المعادلة السابقة نجد أن :

$$x_1 = \sqrt[4]{20} = 2.115$$

وبالتعويض في العلاقة (٥,١٩) نحصل على :

$$x_2 = \frac{10}{\sqrt[4]{20}} = 4.73$$

لذا تكون نقطة السكون الحدية هي : $(x_1^*, x_2^*) = (2.12, 4.73)$.

وبتطبيق الشرط الكافي لمعرفة ماإذا كان للدالة f عند x_1^* نهاية صغرى أو نهاية كبرى نحسب $\frac{d^2f}{dx_1^2}$ من المعادلة (٥,١٩) ونعوض عن قيمة x_1^* فنحصل على $\left.\frac{d^2f}{dx_1^2}\right|_{\mathbf{x}^*} = 40 > 0$ أي أن النقطة (2.12, 4.73) نقطة نهاية صغرى للدالة $f(x_1, x_2)$ ، وتكون قيمة الدالة عند هذه النهاية الصغرى هي :

$$f(2.12\ ,\ 4.73) = 5(2.12)^2 + (4.73)^2 + 2(2.12)(4.73)$$
$$= 64.9$$

مثال (٤ , ٥)

أوجد القيمة الصغرى للدالة:

$$f(x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3 \qquad (٥ , ٢٠)$$

تحت الشروط:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6 \qquad (٥ , ٢١)$$
$$- x_1 + x_2 + x_3 = 4 \qquad (٥ , ٢٢)$$

الحل

تحتوي هذه المسألة على ثلاثة متغيرات وشرطين، أي أن لدينا متغيرا مستقلا ومتغيرين غير مستقلين. بالتعويض عن x_3 من القيد (٢١ , ٥) تتحول المسألة إلى تصغير الدالة:

$$f(x_1\ ,\ x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 12 \qquad (٥ , ٢٣)$$

وبالطرح بين المعادلتين (٢١ , ٥) و(٢٢ , ٥) يصبح الشرط هو:

$$x_1 = 1 \qquad (٥ , ٢٤)$$

بالتعويض عن قيمة المتغير x_1 باستخدام الشرط (٢٤ , ٥) في دالة الهدف (٢٣ , ٥) تصبح صيغة الدالة هي:

$$f(x_2) = x_2^2 - 2x_2 + 11 \qquad (٥ , ٢٥)$$

وبذلك أصبحت المسألة مسألة تصغير غير مقيدة تحتوي على متغير واحد. الشرط الضروري لكي يكون للدالة $f(x_2)$ نقطة طرفية أو حدية هو وضع مشتقة الدالة f بالنسبة إلى x_2 تساوي صفراً، أي أن:

$$\frac{df}{dx_2} = 2x_2 - 2 = 0 \qquad (٥,٢٦)$$

ومن المعادلة السابقة نجد أن $x_2 = 1$ وحيث أن $x_1 = 1$ من الشرط (٥,٢٤) وبالتعويض في أحد الشرطين (٥,٢١) أو(٥,٢٢)نحصل على $x_3 = 4$ ، لذا تكون النقطة الحدية هي $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (1,1,4)$ وبتطبيق الشرط الكافي لمعرفة ما إذا كانت للدالة f عند x^* نهاية صغرى أو نهاية كبرى نحسب $\frac{d^2f}{dx_2^2}$ من المعادلة (٥,٢٤) ونعوض عن قيمة x_2^* فنجد أن $\left.\frac{d^2f}{dx_2^2}\right|_{\mathbf{x}^*} = 2 > 0$ أي أن النقطة الحدية (1,1,4) نقطة نهاية صغرى، وتكون قيمة الدالة عندها $f(\mathbf{x}^*) = 10$.

(٥,٣) طريقة تغيير القيود

الفكرة الأساسية المستخدمة في طريقة تغيير القيود (constrained variations) هي إيجاد تعبير لصيغة مغلقة (closed form) للتفاضل الكلي من الرتبة الأولى df للدالة f عند جميع النقط التي تتحقق عندها الشروط

$$g_j(\mathbf{x}) = 0 \quad , \quad j = 1 , 2 , \ldots , m$$

ثم الحصول على النقط المثلى المطلوب إيجادها بوضع التفاضل الكلي df مساوياً للصفر. وقبل تحديد الطريقة العامة، سوف نوضح أهم ميزاتها من خلال إيراد صياغة خاصة لمسألة تحتوي على متغيرين وقيد واحد.

لنفترض أن المطلوب هو تصغير الدالة:

$$f = f(x_1 , x_2) \qquad (٥,٢٧)$$

تحت القيد:

$$g(x_1 , x_2) = 0 \qquad (٥,٢٨)$$

للحصول على x_2 نحل معادلة القيد :

$$g(x_1 , x_2) = 0$$

ولنفترض أنه يمكن التعبير عن ذلك بالعلاقة :

$$x_2 = h(x_1) \qquad (٥,٢٩)$$

بالتعويض من المعادلة (٥,٢٩) في دالة الهدف تصبح دالة في متغير واحد؛ أي أن $f = f(x_1 , h(x_1))$ ، والشرط الضروري لكي يكون لهذه الدالة نهاية صغرى عند (x_1^* , x_2^*) هو أن المشتقة الكلية للدالة $f(x_1 , x_2)$ بالنسبة إلى x_1 يجب أن تساوي صفراً عند (x_1^* , x_2^*) والتفاضل الكلي للدالة $f(x_1 , x_2)$ يمكن كتابته على الصيغة :

$$df(x_1 , x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 \qquad (٥,٣٠)$$

والمشتقة الكلية بالنسبة للمتغير x_1 هي :

$$\frac{df(x_1 , x_2)}{dx_1} = \frac{\partial f(x_1 , x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f(x_1 , x_2)}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dx_1}$$

وبمساواتها بالصفر نحصل على العلاقة :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = 0 \qquad (٥,٣١)$$

حيث إن $g(x_1^* , x_2^*) = 0$ عند نقطة التصغير. لاحظ أن الإزاحات dx_1 , dx_2 التي تؤخذ حول النقطة (x_1^* , x_2^*) تسمى تغيرات أو إزاحات مسموح بها (admissible variations) إذا حققت العلاقة :

$$g(x_1^* + dx_1 , x_2^* + dx_2) = 0 \qquad (٥,٣٢)$$

ولما كانت متسلسلة مفكوك تايلور (Taylor) للدالة (٥,٣٢) حول النقطة (x_1^* , x_2^*) تعطى بالصيغة :

$$g\left(x_1^* + dx_1\ ,\ x_2^* + dx_2\right) \approx g\left(x_1^*\ ,\ x_2^*\right) + \frac{\partial g\left(x_1^*\ ,\ x_2^*\right)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g\left(x_1^*\ ,\ x_2^*\right)}{\partial x_2} dx_2 = 0 \qquad (٥,٣٣)$$

علماً بأننا نفرض أن dx_1 و dx_2 مقادير صغيرة، وبما أن $g\left(x_1^*\ ,\ x_2^*\right) = 0$ ، فإن المعادلة (٥,٣٣) تنحصر في الصيغة التالية:

$$(٥,٣٤) \qquad dg\left(x_1^*\ ,\ x_2^*\right) = \frac{\partial g\left(x_1^*\ ,\ x_2^*\right)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g\left(x_1^*\ ,\ x_2^*\right)}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

لذا فإن المعادلة (٥,٣٤) تتحقق لجميع التغيرات المقبولة، وبافتراض أن $\frac{\partial g}{\partial x_2} \neq 0$ بمعنى أن $g(x_1, x_2)$ دالة في x_1 فقط، فإنه يمكن كتابة المعادلة (٥,٣٤) كما يلي:

$$(٥,٣٥) \qquad dx_2 = - \left.\frac{\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)}{\left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)}\right|_{(x_1^*\ ,\ x_2^*)} dx_1$$

وتعني هـذه العلاقة أنه عندما يتعين التغير (أو الإزاحة) dx_1 في x_1 فإن التغير dx_2 في x_2 يتعين تلقائيا.

بالتعويض من المعادلة (٥,٣٥) في المعادلة (٥,٣١) نحصل على:

$$(٥,٣٦) \qquad df = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)}{\left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)} \frac{\partial f}{\partial x_2}\right]_{x^*} dx_1 = 0$$

يلاحظ أن أي اختبار لقيم dx_1 يحقق المعادلة (٥,٣٦) طالما كانت:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)}{\left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)} \frac{\partial f}{\partial x_2}\right]_{x^*} = 0 \qquad (٥,٣٧)$$

وهو الشرط الضروري لكي توجد نقطة حدية (طرفية) عند $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$.

مثال (٥,٥)

أوجد النقط الحدية للدالة:

$$f(x_1 \, , x_2) = C\, x_1^{-1}\, x_2^{-2} \qquad (٥,٣٨)$$

تحت الشرط:

$$g(x_1 \, , x_2) = x_1^2 + x_2^2 - a^2 = 0 \qquad (٥,٣٩)$$

الحل

لهذه المسألة متغيران وقيد واحد، وبالتالي فإنه يمكن تطبيق المعادلة (٥,٣٧) لإيجاد النقط الحدية (أو الطرفية) للدالة. بإيجاد المشتقات الجزئية للدالة (٥,٣٨) والشرط (٥,٣٩) بالنسبة للمتغيرات x_1, x_2 نحصل على:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = - C\, x_1^{-2}\, x_2^{2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -2\, C\, x_1^{-1}\, x_2^{-3}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = 2x_1 \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = 2x_2$$

وبتطبيق المعادلة (٥,٣٧) نجد أن:

$$\left[- C\, x_1^{-2}\, x_2^{-2} \left(2x_2\right) + 2C\, x_1^{-1}\, x_2^{-3} \left(2x_1\right)\right]_{x^*} = 0 \qquad (٥,٤٠)$$

أي أن: $x_2^* = \pm \sqrt{2}\; x_1^*$

وبالتعويض في القيد (أو الشرط) أي في المعادلة (٥,٣٩) حصل على:

$$x_1^* = \pm \frac{a}{\sqrt{3}} \quad , \quad x_2^* = \pm a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, -a\sqrt{\frac{2}{3}}\right), \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, -a\sqrt{\frac{2}{3}}\right), \left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, a\sqrt{\frac{2}{3}}\right), \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, a\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

وفيما يلي ندرس الشرط الضروري للصياغة العامة لهذا النوع من المسائل.

الشروط الضرورية للمسألة العامة

يمكن تعميم الأسلوب الذي اتبعناه في حل المسألة السابقة بمتغيرين وقيد واحد إلى حالة المسائل التي لها n متغير و m قيد.

بفرض أن معادلات القيود هي:

$$g_j(\mathbf{x}) = 0 \quad , \quad (j = 1 , 2 , \ldots , m)$$

لاحظ أنه من كل معادلة قيد، يمكن الحصول على معادلة خطية في الإزاحات $dx_i \; , \; (i = 1 , 2 , \ldots , n)$. لذا سوف يكون لدينا m من المعادلات الخطية في n متغير. وبالتالي فإنه يمكن التعبير عن m إزاحة بدلالة المتبقي من الإزاحات.

يمكن استخدام هذا التعبير لصياغة التفاضل الكلي لدالة الهدف df بدلالة n-m من التغيرات غير المستقلة. باعتبار أن معاملات الإزاحات المستقلة تختفي في المعادلة $df=0$.

ويمكن الحصول على الشروط الضرورية لإيجاد الحل الأمثل المشروط للدالة المعطاة، وباتباع الخطوات التالية يمكن الوصول إلى النقط الحدية بالتفصيل.

نوجد التفاضل الكلي لدالة الهدف الذي يعطى بالمعادلة التالية:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\mathbf{x}^*\right) dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(\mathbf{x}^*\right) dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(\mathbf{x}^*\right) dx_n \qquad (٥,٤١)$$

$\mathbf{x}^*$ تمثل النقطة الحدية، وتمثل $\left(dx_1 \; , \; dx_2 \; , \; \ldots \; , \; dx_n\right)$ فئة إزاحات مقبولة لا نهائية الصغر (infinitesimal) حول النقطة $\mathbf{x}^*$.

لاحظ أن :

$$g_j(\mathbf{x}^*) = 0 \quad , \quad j = 1 , 2 , \dots , m \tag{٥ , ٤٢}$$

أي أن القيود المعطاة محققة عند النقطة الحدية ، كما أن :

$$g(\mathbf{x}^* + \mathbf{dx}) = g_j(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\, g_j(\mathbf{x}^*)}{\partial\, x_i}\, dx_i = 0 \;,\; j=1,2,\dots,m \tag{٥ , ٤٣}$$

حيث إن $\mathbf{dx} = (dx_1 , dx_2 \;, \dots \;, dx_n)$ هو متجه الإزاحات المقبولة . تؤدي المعادلتان (٤٢ , ٥) و(٤٣ , ٥) إلى مجموعة المعادلات التالية :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} dx_n = 0 \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \dfrac{\partial g_2}{\partial x_n} dx_n = 0 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial g_m}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n} dx_n = 0 \end{cases} \tag{٥ , ٤٤}$$

لاحظ أن جميع المشتقات الجزئية محسوبة عند النقطة الحدية $\mathbf{x}^*$. لا توجد أي فائدة من فئة التغيرات $dx_i \;\;, \; i=1,2,\dots,n$ التي لا تحقق المعادلات (٤٤ , ٥) لأنها لا تحقق القيود المفروضة . يمكن حل المعادلات (٤٤ , ٥) للتعبير عن m من التغيرات ، على سبيل المثال m الأولى ، بدلالة المتغيرات المتبقية وبالتالي يمكن إعادة كتابة المعادلات (٤٤ , ٥) كما يلي :

$$
(٥,٤٥)\quad
\begin{cases}
\frac{\partial g_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g_1}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial x_m} dx_m & = \\
- \frac{\partial g_1}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_{m+2}} dx_{m+2} - \dots - \frac{\partial g_1}{\partial x_n} dx_n & = h_1 \\
\frac{\partial g_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial g_2}{\partial x_m} dx_m & = \\
- \frac{\partial g_2}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} - \frac{\partial g_2}{\partial x_{m+2}} dx_{m+2} - \dots - \frac{\partial g_2}{\partial x_n} dx_n & = h_2 \\
\vdots & \vdots \\
\frac{\partial g_m}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g_m}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial x_m} dx_m & = \\
- \frac{\partial g_m}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} - \frac{\partial g_m}{\partial x_{m+2}} dx_{m+2} - \dots - \frac{\partial g_m}{\partial x_n} dx_n & = h_m
\end{cases}
$$

تحتوي الحدود التي في الطرف الأيمن من المعادلات (٥,٤٥) على الإزاحات المستقلة dx_n , ... , dx_{m+2} , dx_{m+1} وبوضع أي قيم اختيارية غير صفرية لهذه التغيرات فإن قيم التغيرات غير المستقلة تعطى بالمعادلات (٥,٤٥).

يمكن حل هذه المعادلات باستخدام قاعدة كرامر (Cramer's rule) لحل مجموعة من المعادلات الخطية فنحصل على dx_1 مثلاً كما يلي:

$$dx_1 = \frac{\begin{vmatrix} h_1 & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ h_2 & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_m} \\ \vdots & & & & \\ h_m & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \frac{\partial g_m}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_m} \\ \vdots & & & & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \frac{\partial g_m}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}} \qquad (٥,٤٦)$$

حيث إن :

$$h_i = - \frac{\partial g_i}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} - \frac{\partial g_i}{\partial x_{m+2}} dx_{m+2} - \ldots - \frac{\partial g_i}{\partial x_n} dx_n \, ,$$

$$i = 1 , 2 , \ldots , m \qquad (٥,٤٧)$$

المحددة في بسط المعادلة (٥ , ٤٦) يمكن كتابتها كالتالي :

$$\begin{vmatrix} h_1 & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ h_2 & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_m} \\ \vdots & & & & \\ h_m & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \frac{\partial g_m}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_m} \\ \vdots & & & & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \frac{\partial g_m}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}$$

$$(٥,٤٨) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_{m+2}} dx_{m+2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_{m+2}} dx_{m+2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_m} \\ \vdots & & & & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_{m+2}} dx_{m+2} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \frac{\partial g_m}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \cdots - \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_n} dx_n & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_n} dx_n & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_m} \\ \vdots & & & & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_n} dx_n & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \frac{\partial g_m}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}$$

وباستخدام مفهوم اليعقوبية (Jacobian) التالي:

$$(٥,٤٩) \quad J\left(\frac{g_1, g_2, \ldots, g_m}{x_{m+k}, x_2, x_3, \ldots, x_m}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_{m+k}} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_{m+k}} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_m} \\ \vdots & & & & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_{m+k}} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \frac{\partial g_m}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}$$

يمكن التعبير عن المعادلة (٥ , ٤٨) بالصيغة :

$$\begin{vmatrix} h_1 & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ h_2 & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_m} \\ \vdots & & & & \\ h_m & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \frac{\partial g_m}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} = -J\left(\frac{g_1 , g_2 , \dots , g_m}{x_{m+1} , x_2 , x_3 , \dots , x_m}\right) dx_{m+1}$$

(٥ , ٥٠)

$$-J\left(\frac{g_1 , g_2 , \dots , g_m}{x_{m+1} , x_2 , x_3 , \dots , x_m}\right) dx_{m+2} - \dots - J\left(\frac{g_1 , g_2 , \dots , g_m}{x_n , x_2 , \dots , x_m}\right) dx_n$$

يمكن كتابة المعادلة (٥ , ٤٦) كما يلي :

(٥ , ٥١)

$$dx_1 = \frac{-\left[J\left(\frac{g_1 , g_2 , \dots , g_m}{x_{m+1} , x_2 , x_3 , \dots , x_m}\right) dx_{m+1} + \dots + J\left(\frac{g_1 , g_2 , \dots , g_m}{x_n , x_2 , \dots , x_m}\right) dx_n\right]}{J\left(\frac{g_1 , g_2 , \dots , g_m}{x_1 , x_2 , \dots , x_m}\right)}$$

وبالتماثل يمكن الحصول على الحل الخاص بالتغير dx_k فيكون :

(٥ , ٥٢)

$$dx_k = \frac{-\left[J\left(\frac{g_1 , g_2 , \dots , g_m}{x_1 , x_2 , \dots , x_{k-1} , x_{m+1} , x_{k+1} , \dots , x_m}\right) dx_{m+1} + \dots + J\left(\frac{g_1 , g_2 , \dots , g_m}{x_1 , x_2 , \dots , x_{k-1} , x_m , x_{k+1} , \dots , x_m}\right) dx_n\right]}{J\left(\frac{g_1 , g_2 , \dots , g_m}{x_1 , x_2 , \dots , x_m}\right)}$$

$$k = 1 , 2 , \dots , m$$

لاحظ أن للمعادلتين (٥ , ٥١) و (٥ , ٥٢) قيماً موجودة إذا كان :

$$J\left(\frac{g_1 , g_2 , \dots , g_m}{x_1 , x_2 , \dots , x_m}\right) \neq 0 \qquad (٥,٥٣)$$

بالتعويض من المعادلة (٥,٥٢) في المعادلة (٥,٤١) :

$$\begin{aligned}
df = \frac{1}{J\left(\frac{g_1 , g_2 , \dots , g_m}{x_1 , x_2 , \dots , x_m}\right)} \Bigg\{ \Bigg[& - \frac{\partial f}{\partial x_1} J\left(\frac{g_1 , g_2 , \dots , g_m}{x_{m+1} , x_2 , x_3 , \dots , x_m}\right) \\
& - \frac{\partial f}{\partial x_2} J\left(\frac{g_1 , g_2 , \dots , g_m}{x_1 , x_{m+1} , x_3 , x_4 , \dots , x_m}\right) - \dots \\
& - \frac{\partial f}{\partial x_m} J\left(\frac{g_1 , g_2 , \dots , g_m}{x_1 , x_2 , \dots , x_{m-1} , x_{m+1}}\right) + \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} J\left(\frac{g_1 , g_2 , \dots , g_m}{x_1 , x_2 , \dots , x_m}\right) \Bigg] dx_{m+1} \\
& + \Bigg[- \frac{\partial f}{\partial x_1} J\left(\frac{g_1 , g_2 , \dots , g_m}{x_{m+2} , x_2 , x_3 , \dots , x_m}\right) - \frac{\partial f}{\partial x_2} J\left(\frac{g_1 , g_2 , \dots , g_m}{x_1 , x_{m+2} , x_3 , \dots , x_m}\right) \\
& - \dots - \frac{\partial f}{\partial x_m} J\left(\frac{g_1 , g_2 , \dots , g_m}{x_1 , x_2 , \dots , x_{m-1} , x_{m+2}}\right) + \frac{\partial f}{\partial x_{m+2}} J\left(\frac{g_1 , g_2 , \dots , g_m}{x_1 , x_2 , \dots , x_m}\right) \Bigg] dx_{m+2} \\
& + \dots + \Bigg[- \frac{\partial f}{\partial x_1} J\left(\frac{g_1 , g_2 , \dots , g_m}{x_n , x_2 , x_3 , \dots , x_m}\right) - \frac{\partial f}{\partial x_2} J\left(\frac{g_1 , g_2 , \dots , g_m}{x_1 , x_2 , \dots , x_m}\right) \\
& - \dots - \frac{\partial f}{\partial x_m} J\left(\frac{g_1 , g_2 , \dots , g_m}{x_1 , x_2 , \dots , x_{m-1} , x_n}\right) + \frac{\partial f}{\partial x_n} J\left(\frac{g_1 , g_2 , \dots , g_m}{x_1 , x_2 , \dots , x_m}\right) \Bigg] dx_n \Bigg\}
\end{aligned} \qquad (٥,٥٤)$$

ذكرنا سابقاً أن التغيرات $dx_{m+1} , dx_{m+2} , \dots , dx_n$ تغيرات نهائية الصغر ، لذلك تأخذ قيما صغيرة جداً وبالتالي يكون الشرط الضروري لوجود نقطة حدية عند $\mathbf{x}^*$ هو أن تختفي معاملات $dx_{m+1} , dx_{m+2} , \dots , dx_n$ عند النقطة $\mathbf{x}^*$ ، وبالتالي يمكن الحصول على الشروط الضرورية بوضع :

$$-\frac{\partial f}{\partial x_1} J\left(\frac{g_1, g_2, \ldots, g_m}{x_k, x_2, x_3, \ldots, x_m}\right) - \frac{\partial f}{\partial x_2} J\left(\frac{g_1, g_2, \ldots, g_m}{x_1, x_k, x_3, x_4, \ldots, x_m}\right) -$$

$$\ldots - \frac{\partial f}{\partial x_m} J\left(\frac{g_1, g_2, \ldots, g_m}{x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_k}\right) + \frac{\partial f}{\partial x_k} J\left(\frac{g_1, g_2, \ldots, g_m}{x_1, x_2, \ldots, x_m}\right) = 0 \qquad (٥,٥٥)$$

$$k = m+1, m+2, \ldots, n$$

بوضع العمود $\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_k} \end{bmatrix}$ المناظر للمتغير x_k مكان العمود الأول للمحددات الممثلة في

المعادلات (٥,٥٥)، يمكن إعادة كتابة المعادلات (٥,٥٥) فتصبح :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} J\left(\frac{g_1, g_2, \ldots, g_m}{x_1, x_2, \ldots, x_m}\right) - \frac{\partial f}{\partial x_1} J\left(\frac{g_1, g_2, \ldots, g_m}{x_k, x_2, x_3, \ldots, x_m}\right) +$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} J\left(\frac{g_1, g_2, \ldots, g_m}{x_k, x_1, x_3, x_4, \ldots, x_m}\right) - \ldots + (-1)^{\ell} \frac{\partial f}{\partial x_{\ell}}$$

$$J\left(\frac{g_1, g_2, \ldots, g_m}{x_k, x_1, x_2, \ldots, x_{\ell-1}, x_{\ell+1}, \ldots, x_m}\right) + \ldots +$$

$$(-1)^m \frac{\partial f}{\partial x_m} J\left(\frac{g_1, g_2, \ldots, g_m}{x_k, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}}\right) = 0 \qquad (٥,٥٦)$$

$$k = m+1, m+2, \ldots, n$$

يمكن كتابة المعادلات (٥,٥٦) بالطريقة المبسطة التالية:

$$J\left(\frac{g_1 , g_2 , \dots , g_m}{x_k , x_1 , x_2 , \dots , x_m}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_k} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_m} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_k} & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_k} & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_k} & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} = 0 \quad (٥,٥٧)$$

$$k = m+1 , m+2 , \dots , n$$

لاحظ أن المعادلات (٥,٥٧) والتي عددها $n-m$ تعطي الشروط الضرورية لوجود نقطة حدية للدالة $f(\mathbf{x})$ تحت m قيد مساواة

$$g_j(\mathbf{x}) = 0 \quad ، \quad j = 1 , 2 , \dots , m .$$

الشروط الكافية للمسألة العامة

بحذف أول m من المتغيرات باستخدام m من القيود الأولى، دالة الهدف f معتمدة على المتغيرات المتبقية x_{m+1} ، x_{m+2} ، ... x_n . باستخدام مفكوك متسلسلة تايلور (Taylor) للدالة f بدلالة هذه المتغيرات حول النقطة الحدية $\mathbf{x}^*$ الذي يعطى كالتالي:

$$f(\mathbf{x}^* + \mathbf{dx}) \approx f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=m+1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_g dx_i$$

$$+ \frac{1}{2!} \sum_{i=m+1}^{n} \sum_{j=m+1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}\right) dx_i\, dx_j + \dots \qquad (٥,٥٨)$$

حيث ترمز $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_g$ للمشتقة الجزئية بالنسبة للمتغير x_i (مع الاحتفاظ بالمتغيرات $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots x_n$ ثابتة)، يسمح للمتغيرات $x_1, x_2, \dots, x_m$ بالتغير لكي تتحقق القيود $g_j(\mathbf{x}^* + \mathbf{dx}) = 0 , j = 1, 2, \dots, m$، والمشتقة الجزئية الثانية $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}\right)_g$ تستخدم في تعريف معنى مشابه لما سبق تعريفه بالنسبة للمشتقة الأولى.

لتوضيح ما ذكر مؤخراً نورد المثال التالي.

مثال (٥,٦)

نفرض أننا نود تصغير الدالة:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, x_3)$$

تحت القيد التالي:

$$g_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 8 = 0$$

التوضيح

حيث إن n=3 و m=1 فيمكن التفكير في اختيار أي m من المتغيرات وليكن x_1 متغيراً غير مستقل، وباقي المتغيرات n-m هي x_2 و x_3 مستقلة. على سبيل

المثال، المشتقة الجزئية المقيدة $\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_g$ تعني معدل تغير الدالة f بالنسبة إلى x_2 (مع الاحتفاظ بالمتغير المستقل x_3 ثابتاً) وفي الوقت نفسه نسمح للمتغير x_1 بالتغير حول النقطة $\mathbf{x}^*$ بحيث يتحقق الشرط $g_1(\mathbf{x}^*) = 0$، يترتب على ذلك أن dx_1 يمكن اختيارها لكي تتحقق العلاقة

$$g_1(\mathbf{x}^* + \mathbf{dx}) \approx g_1(\mathbf{x}^*) + \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*)\,dx_1 + \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*)\,dx_2 + \frac{\partial g_1}{\partial x_3}(\mathbf{x}^*)\,dx_3 = 0 \qquad (٥,٥٩)$$

أي أن:

$$2x_1^* dx_1 + 2x_2^* dx_2 = 0$$

حيث إن $g_1(\mathbf{x}^*) = 0$ عند النقطة المثلى و $dx_3 = 0$ (x_3 ثابتة).

نلاحظ أن $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_g = 0$ لجميع قيم i حيث $i = m+1 , m+2 , \ldots , n$

وذلك لأن جميع التغيرات dx_i التي تظهر في المعادلة (٥,٥٨) مستقلة، ولذلك فإن الشروط الضرورية لوجود نقطة مثلى $\mathbf{x}^*$ يمكن التعبير عنها بالصيغة:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_g = 0 \quad , \quad i = m+1 , m+2 , \ldots , n \qquad (٥,٦٠)$$

يمكن إثبات أن المعادلات (٥,٦٠) هي نفسها المعادلات (٥,٥٧)، كما في حالة البرمجة غير المقيدة ذات المتغيرات المتعددة التي سبقت دراستها في الفصل الرابع. يمكن إيجاد الشرط الكافي لكي تكون $\mathbf{x}^*$ نهاية صغرى (أو كبرى) نسبية، والصيغة التربيعية Q، في هذه الحالة، تُعرّف بالمعادلة:

$$Q = \sum_{i=m+1}^{n} \sum_{j=m+1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_g dx_i\, dx_j \qquad (٥,٦١)$$

تكون Q موجبة (سالبة) لجميع الإزاحات لقيم $dx_i \neq 0$.

كما في النظرية (٥,١)، فإن المصفوفة $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_g$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_{m+1}^2}\right)_g & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_{m+1}\partial x_{m+2}}\right)_g & \cdots & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_{m+1}\partial x_n}\right)_g \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_{m+2}\partial x_{m+1}}\right)_g & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_{m+2}^2}\right)_g & \cdots & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_{m+2}\partial x_n}\right)_g \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_{m+1}}\right)_g & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_{m+2}}\right)_g & \cdots & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\right)_g \end{bmatrix}$$

تكون مؤكدة الإيجاب (السلبية) لكي تكون Q موجبة (سالبة) لكل الاختيارات لقيم dx_i.

مثال (٥,٧)

أوجد القيمة الصغرى للدالة :

$$f(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) \qquad (٥,٦٢)$$

تحت القيدين :

$$g_1(\mathbf{y}) = y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 5y_4 - 10 = 0 \qquad (٥,٦٣)$$

$$g_2(\mathbf{y}) = y_1 + 2y_2 + 5y_3 + 6y_4 - 15 = 0 \qquad (٥,٦٤)$$

الحل

يمكن حل هذه المسألة بتطبيق الشروط الضرورية المعطاة بالمعادلة (٥,٥٧) ، حيث $n=4$ و $m=2$ لذا يلزم اختيار متغيرين مستقلين . سوف نوضح أولاً أن أي فئة اختيارية من المتغيرات لا يمكن اختيارها كمتغيرات مستقلة ، حيث إن باقي المتغيرات

(غير المستقلة) يجب أن تحقق المعادلة (٥ , ٥٣).

باستخدام مسميات المتغيرات في المعادلات من (٥ , ٦٢) إلى (٥ , ٦٤)، وبفرض أن المتغيرات المستقلة هي $x_3 = y_3$ و $x_4 = y_4$ لذا فإن $x_1 = y_1$ و $x_2 = y_2$ غير مستقلة وبالتالي، فإن اليعقوبية (٥ , ٥٣) تصبح:

$$J\left(\frac{g_1, g_2}{x_1, x_2}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

وبالتالي فإنه لا يمكن تطبيق الشرط الضروري المعطى بالمعادلات (٥ , ٥٧). لنختار فئة من المتغيرات المستقلة مختلفة عن الفئة السابقة، ولتكن $x_3 = y_2$ و $x_4 = y_4$ متغيرات مستقلة وبالتالي فإن $x_1 = y_1$ و $x_2 = y_3$ متغيرات غير مستقلة. فتصبح المعادلة اليعقوبية (٥ , ٥٣) كما يلي:

$$J\left(\frac{g_1, g_2}{x_1, x_2}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

ولمثل هذا الاختيار يمكن تطبيق المعادلات (٥ , ٥٧)، بوضع $k = m+1 = 3$ نحصل على المعادلة الأولى كما يلي:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_3} & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_2} & \frac{\partial f}{\partial y_1} & \frac{\partial f}{\partial y_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & y_1 & y_3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= y_2(5-3) - y_1(10-6) + y_3(2-2) = 2y_2 - 4y_1 = 0 \qquad (٥,٦٥)$$

وبوضع $k = m + 2 = n = 4$ نحصل على المعادلة الثانية :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_4} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_4} & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_4} & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_4} & \frac{\partial f}{\partial y_1} & \frac{\partial f}{\partial y_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial y_4} & \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_4} & \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_4 & y_1 & y_3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= y_4(5-3) - y_1(25-18) + y_3(5-6)$$

$$= 2y_4 - 7y_1 - y_3 = 0 \qquad (٥,٦٦)$$

وهما الشرطان الضروريان لكي تكون للدالة f قيمة صغرى أو قيمة عظمى كما يلي :

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2} y_2 \\ y_3 &= 2y_4 - 7y_1 = 2y_4 - \frac{7}{2} y_2 \end{aligned} \right| \qquad (٥,٦٧)$$

بالتعويض من المعادلات (٥,٦٧) في معادلتي القيد (٥,٦٣) و (٥,٦٤) نحصل

على:

$$-8y_2 + 11y_4 = 10$$

$$-15y_2 + 16y_4 = 15$$

والتي نحصل منها على الحل الأمثل كما يلي:

$$(y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*) = \left(\frac{-5}{74}, \frac{-5}{37}, \frac{155}{74}, \frac{30}{37}\right)$$

ولمعرفة ما إذا كان للدالة f(y) قيمة صغرى أو كبرى عند النقطة **y***، أي لتحديد نوع النهاية عندها نطبق الشرط الكافي للتحقق فيما إذا كانت المصفوفة التالية مؤكدة الإيجاب (أو السلبية).

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}\right)_g & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_3\, \partial x_4}\right)_g \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_4\, \partial x_3}\right)_g & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_4^2}\right)_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y_4\, \partial y_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y_2\, \partial y_4} & \frac{\partial^2 f}{\partial y_4^2} \end{bmatrix}_{\mathbf{y}=\mathbf{y}^*}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وقيم المحددات الجزئية أو الفرعية الرئيسة هي:

$$|1| = 1 \ , \ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

أي أن المصفوفة مؤكدة الإيجاب عند النقطة **y***، وهذا يعني أن للدالة نهاية صغرى عند هذه النقطة وقيمتها:

$$f(y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*) = 2.525$$

مثال (٥,٨)

أوجد القيمة الصغرى للدالة :

$$f(x)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2) \quad (٥,٦٨)$$

تحت الشرطين :

$$g_1(x) = x_1 - x_2 = 0 \quad (٥,٦٩)$$

$$g_2(x) = x_1 - x_2 + x_3 - 1 = 0 \quad (٥,٧٠)$$

الحل

يمكن حل هذه المسألة بتطبيق الشروط الضرورية المعطاة بالمعادلات (٥,٥٧)، حيث $n=3$ و $m=2$، لذا يلزم اختيار $(n-m=1)$ متغير مستقل وليكن x_3، وتكون المتغيرات غير المستقلة هي x_1 و x_2.

المعادلة اليعقوبية (٥,٥٣) في هذه الحالة هي :

$$J\left(\frac{g_1 , g_2}{x_1 , x_2}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

والآن يمكن تطبيق المعادلات (٥,٥٧).

بوضع $k = m+1 = 3$ نحصل على المعادلة الأولى والأخيرة

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_3} & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_3 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x_3(1+1) - x_1(0+1) + x_2(0-1)$$

$$= 2x_3 - x_1 - x_2 = 0 \qquad (٥,٧١)$$

تعطي المعادلة (٥,٧٠) الشرط الضروري لكي يكون للدالة f(x) قيمة صغرى أو عظمى. من المعادلتين (٥,٧٠) و (٥,٧١) نحصل على $x_3^* = \frac{1}{3}$ ، ومن المعادلتين (٥,٦٩) و (٥,٧٠) نحصل على $x_1^* = x_2^* = \frac{1}{3}$ ، وبالتالي تكون النقطة الحدية هي $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$.

لمعرفة ما إذا كان للدالة قيمة صغرى أو عظمى عند x^* ، نطبق الشرط الكافي وذلك بمعرفة ما إذا كانت المصفوفة التالية مؤكدة الإيجاب (أو السلبية)، فنجد أن :

$$\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}\right)_g\right] = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}\right] = [1]$$

وحيث إن محددة هذه المصفوفة $1 = |1|$ فإنها مؤكدة الإيجاب وبالتالي تكون للدالة قيمة صغرى عند X^* وهي $\frac{1}{6} = f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

نلاحظ أن هذا المثال قد سبق حله في مثال (٣,٢) بطريقة التعويض المباشر حيث حصلنا على النتيجة نفسها، وتنطبق نفس الملاحظة المذكورة في نهاية المثال (٣,٢)

على هذا المثـال أيضـاً، وفـيـهـا لابد ألا تكون نقطة الأصل (0 , 0 , 0) هي النهـاية الصغرى كما توحي بذلك دالة الهدف، لأن هذا الحل لن يحقق القيد (٥,٧٠) برغم تحقيقه القيد (٥,٦٩) .

ملاحظة

تبدو طريقة تغيير القيود بسيطة من الوجهة النظرية، إلا أن لها صعوبتها من الناحية التطبيقية للأسباب التالية :

١ - تتطلب الشروط الضرورية حساب محددات من الرتبة m+1، وقد لا يكون ذلك سهلاً مع كبر قيمة m .

٢ - تتطلب الشروط الكافية حساب المشتقات الثانية المشروطة $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}\right)_g$ التي يصعب حسابها إذا زاد عدد القيود على ثلاثة .

لهذه الأسباب سوف نناقش طريقة مضاريب لاجرانج في البند التالي، وهي طريقة شائعة الاستخدام في حل المسائل متعددة المتغيرات ذات قيود على هيئة (أو صيغة) معادلات .

(٥,٤) طريقة مضاريب لاجرانج

في طريقة التعويض المباشر كنا نتخلص من m من المتغيرات في دالة الهدف بمساعدة m من معادلات القيود، فتتحول المسألة إلى مسألة غير مشروطة في عدد n-m من المتغيرات المستقلة. أما في طريقة مضاريب لاجرانج (Lagrange multipliers) التي ندرسها في هذا البند، فتتم إضافة متغير واحد مناظر لكل قيد أي أنه إذا كان للمسألة الأصلية n من المتغيرات و m من معادلات القيود، عندئذ يصبح العدد النهائي للمجاهيل (n+m). سوف نلاحظ أن طريقة الحل تكون أبسط بإضافة

المتغيرات الجديدة. لتوضيح خطوات هذه الطريقة، سوف نعطي في البداية مثالاً بسيطاً بمتغيرين وقيد واحد، ثم نتدرج إلى مناقشة المسألة العامة التي تتكون من n من المتغيرات، و m من القيود.

المسائل بمتغيرين وقيد واحد

ليكن لدينا مسألة تصغير الدالة:

$$z = f(x_1 , x_2) \qquad (٥,٧٢)$$

تحت القيد:

$$g(x_1 , x_2) = 0 \qquad (٥,٧٣)$$

لقد ناقشنا هذه المسألة من قبل في البند (٥,٣) ووجدنا أن الشرط الضروري لكي توجد نقطة طرفية عند $x = x^*$ هو:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f/\partial x_2}{\partial g/\partial x_2}\,\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)_{(x_1^* , x_2^*)} = 0 \qquad i = 1,2 \qquad (٥,٧٤)$$

بتعريف كمية ولتكن l وتسمى مضروب لاجرانج بالصيغة:

$$\lambda = - \left(\frac{\partial f / \partial x_2}{\partial g / \partial x_2}\right)\Bigg|_{(x_1^* , x_2^*)} \qquad (٥,٧٥)$$

عندئذ يمكن كتابة المعادلة (٥,٧٤) بالصيغة التالية:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda\,\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)\Bigg|_{(x_1^* , x_2^*)} = 0 \qquad (٥,٧٦)$$

وأيضاً يمكن كتابتها بالصيغة التالية:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda\,\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)\Bigg|_{(x_1^* , x_2^*)} = 0 \qquad (٥٧٧)$$

بالإضافة إلى ذلك فإن شرط المساواة يتحقق عند النقطة الطرفية، أي أن:

$$g(x_1^* , x_2^*) = 0 \qquad (٥,٧٨)$$

لذا فإن المعادلات (٥, ٧٦) - (٥, ٧٨) تعطي الشروط الضرورية لكي تكون النقطة (x_1^*, x_2^*) نقطة طرفية أو حدية.

يلاحظ أن المشتقة الجزئية $\frac{\partial g}{\partial x_2}$ عند النقطة (x_1^*, x_2^*) يجب أن تكون غير صفرية حتى يمكن تعريف ا، ويمكن اشتقاق الشروط الضرورية المعطاة بالمعادلات(٥, ٧٦) - (٥, ٧٨) بتكوين دالة L المعروفة بدالة لاجرانج حيث

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda\, g(x_1, x_2) \qquad (٥, ٧٩)$$

فإذا ساوينا المشتقات الجزئية لدالة لاجرانج بالنسبة إلى جميع المتغيرات x_1, x_2, λ بالصفر، فإنه يمكن الحصول على الشروط الضرورية المعطاة بالمعادلات (٥, ٧٦) - (٥, ٧٨) كما يلي:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, x_2, \lambda) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, x_2, \lambda) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_1, x_2, \lambda) &= g(x_1, x_2) = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (٥, ٨٠)$$

والتي تتحقق عند النقطة الطرفية (x_1^*, x_2^*).

سوف نعطي فيما بعد الشروط الكافية للتأكد من تحقيق الحل لمتطلبات المسألة في الصيغة العامة.

مثال ٥, ٩)

أوجد القيمة الصغرى للدالة:

$$f(x_1 , x_2) = (x_1-2)^2 + (x_2-2)^2$$

تحت القيد:

$$x_1 + x_2 = 6$$

الحل

لحل هذه المسألة نكوّن دالة لاجرانج وهي:

$$L(x_1 , x_2 , \lambda) = f(x_1 , x_2) + \lambda\, g(x_1 , x_2)$$

$$= (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 6)$$

الشروط الضرورية لتصغير الدالة تعطى بالعلاقات التالية:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1-2) + \lambda = 0 \qquad (٥,٨١)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_2-2) + \lambda = 0 \qquad (٥,٨٢)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 6 = 0 \qquad (٥,٨٣)$$

وبحذف λ من المعادلتين (٥,٨١) و (٥,٨٢) نحصل على:

$$4 - 2x_1 = 4 - 2x_2$$

والتي منها نحصل على:

$$x_1^* = x_2^*$$

وبالتعويض في المعادلة (٥,٨٣) نحصل على:

$$x_1^* = x_2^* = 3$$

ملاحظة

وتنطبق نفس الملاحظة المذكورة في نهاية المثال (٥,٨) على هذا المثال أيضاً،

وفيها لابد ألا تكون نقطة الأصل (0 , 0 , 0) النهاية الصغرى كما توحي بذلك دالة الهدف .

يمكن تعميم الشروط (٥,٨٠) لكي تناسب الحالة العامة التي يكون بها n متغيراً، m من معادلات القيود، ويمكن صياغة النتيجة في النظرية التالية :

نظرية (٥,١)

الشرط الضروري لكي يكون للدالة $f(x)$ تحت القيود $g_j(\mathbf{x}) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, m$ نهاية صغرى نسبية عند النقطة x^* هو أن المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاجرانج L (حيث $\left(L = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\right)\right)$ بالنسبة للمركبات الداخلة في تكوينها (Arguments) $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ تساوي صفرا .

البرهان

إذا كانت x^* هي النقطة التي تأخذ عندها الدالة نهاية صغرى مشروطة، فإن df يجب أن تساوي صفراً عند النقطة x^* أي أن :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

(٥,٨٤)

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i = 0$$

نلاحظ أن كلاً من المشتقات الجزئية في العلاقة (٥,٨٤) تساوي صفراً في حالة حسابها عند النقطة x^* وأن dx_i $(i=1,2,\ldots,n)$ إزاحات مقبولة

(admissible variations) حول النقطة X^*. يجب أن تحقق فئة الإزاحات المقبولة الشروط التالية :

$$g_j(\mathbf{x}^* + \mathbf{dx}) = g_j(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial x_i}\bigg|_{x = \mathbf{x}^*} dx_i = 0 \qquad (٥,٨٥)$$

$$j = 1\ , 2, \dots , m$$

وحيث إن : $g_j(\mathbf{x}^*) = 0\ ,\quad j = 1, 2 ,\dots , m$ وذلك عند النقطة الحدية فإن المعادلات (٥,٨٥) تصبح :

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_j(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} dx_i = 0, \quad j = 1, 2,\dots , m \qquad (٥,٨٦)$$

بضرب كل من هذه المعادلات في ثابت λ_j تتعين قيمته فيما بعد وبتكوين كمية dL، بالصيغة :

$$dL = df + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} dx_i \right)$$

يمكن وضع المعادلة الأخيرة في الصيغة التالية :

$$dL = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} \right] dx_i = 0 \qquad (٥,٨٧)$$

لاحظ أن الكمية dL يجب أن تساوي الصفر لكل الإزاحات المقبولة حيث إنها مكونة من مقدارين هما :

المقدار df=0، والمقدار $\sum_{i=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial g_j(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} dx_i = 0,\ j = 1, 2,\dots, m$ لوجود عدد m من الشروط، لذا فإنه يمكن اختيار n-m من المتغيرات المستقلة، بفرض أن $x_1\ , x_2\ , \dots\ , x_m$ هي فئة المتغيرات غير المستقلة.

الآن نختار قيم $\lambda_i\ (i = 1\ , 2\ , \dots\ , m)$ بحيث إن المعاملات (التي عددها

m) للتغيرات $dx_i \ (i = 1, 2, \ldots, m)$ تصبح صفراً، لهذا تعرف λ_i بالمعادلة:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m \qquad (٥,٨٨)$$

تحتوي المعادلة (٥,٨٧) على التغيرات $dx_{m+1}, dx_{m+2}, \ldots, dx_n$ والتي تناظر المتغيرات غير المستقلة $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$. لاحظ أنه يمكن اختيار قيم غير صفرية لهذه المتغيرات وحيث إن dL يجب أن تختفي لكل الاختيارات لقيم $dx_{m+1}, dx_{m+2}, \ldots, dx_n$ ، فإن معاملات كل هذه التغيرات يجب أن تنتهي ويكون:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_j}{\partial x_j} = 0 \quad , \quad j = m+1, m+2, \ldots, n \qquad (٥,٨٩)$$

افترضنا من هذه المناقشة أن القيود محققة عند النقطة الحدية، أي أن:

$$g_j\left(\mathbf{x}^*\right) = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, m \qquad (٥,٩٠)$$

يمكن اشتقاق المعادلات (٥,٨٨) - (٥,٩٠) ببناء دالة لاجرانج حيث:

$$L\left(\mathbf{x}, \lambda\right) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \, g_j(\mathbf{x})$$

وحيث إن:

$$\lambda = \left\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\right\}$$

تم وضع المشتقات الجزئية الأولى للدالة L بالنسبة إلى مركباتها (arguments) تساوي صفراً فإننا نحصل على المعادلات (٥,٨٨) - (٥,٩٠) التي تعبر عن القيود الضرورية لنهاية صغرى نسبية للدالة $f(\mathbf{x})$ عند X^*.

الشروط الكافية للمسألة العامة

نقدم فيما يلي نظرية عن الشروط الكافية للمسألة العامة لكي يكون للدالة $f(x)$ نهاية صغرى مشروطة عند X^*.

m) للتغيرات $dx_i \ (i = 1 , 2 , \ldots , m)$ تصبح صفراً، لهذا تعرف λ_i بالمعادلة :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m \qquad (٥, ٨٨)$$

تحتوي المعادلة (٥ , ٨٧) على التغيرات $dx_{m+1} , dx_{m+2} , \ldots , dx_n$ والتي تناظر المتغيرات غير المستقلة $x_{m+1} , x_{m+2} , \ldots , x_n$. لاحظ أنه يمكن اختيار قيم غير صفرية لهذه المتغيرات وحيث إن dL يجب أن تختفي لكل الاختيارات لقيم $dx_{m+1} , dx_{m+2} , \ldots , dx_n$ ، فإن معاملات كل هذه التغيرات يجب أن تنتهي ويكون :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_j}{\partial x_j} = 0 \quad , \quad j = m+1 , m+2 , \ldots , n \qquad (٥, ٨٩)$$

افترضنا من هذه المناقشة أن القيود محققة عند النقطة الحدية ، أي أن :

$$g_j\left(\mathbf{x}^*\right) = 0 \quad , \quad j = 1 , 2 , \ldots , m \qquad (٥, ٩٠)$$

يمكن اشتقاق المعادلات (٥ , ٨٨) - (٥ , ٩٠) ببناء دالة لاجرانج حيث :

$$L\left(\mathbf{x} , \lambda\right) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \, g_j(\mathbf{x})$$

وحيث إن :

$$\lambda = \left\{\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots , \lambda_m\right\}$$

تم وضع المشتقات الجزئية الأولى للدالة L بالنسبة إلى مركباتها (arguments) تساوي صفراً فإننا نحصل على المعادلات (٥ , ٨٨) - (٥ , ٩٠) التي تعبر عن القيود الضرورية لنهاية صغرى نسبية للدالة $f(\mathbf{x})$ عند X^* .

الشروط الكافية للمسألة العامة

نقدم فيما يلي نظرية عن الشروط الكافية للمسألة العامة لكي يكون للدالة $f(x)$ نهاية صغرى مشروطة عند X^* .

نظرية (٥,٢)

الشروط الكافية للدالة f(x) لكي يكون لها نهاية صغرى نسبية عند X^* هو أن تكون:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \, \partial x_j} dx_i \, dx_j \tag{٥,٩١}$$

والمحسوبة عند النقطة $x = x^*$ مؤكدة موجبة لكل قيم **d x**.

البرهان

دالة لاجرانج لهذه المسألة هي:

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \, g_j(\mathbf{x}) \tag{٥,٩٢}$$

فإذا كانت X^* نقطة حدية للدالة f(x) فإنه يجب أن تتحقق جميع الشروط:

$$g_j(\mathbf{x}^*) = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

فإذا كانت **dx** متجه التغيرات المقبولة حول النقطة X^* ، فإن النقطة $\mathbf{x}^* + \mathbf{dx}$ يجب أن تحقق الشروط المعطاة، ولهذا فإن:

$$g_j(\mathbf{x}^* + \mathbf{dx}) = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, m \tag{٥,٩٤}$$

المعادلات (٥,٩٢) – (٥,٩٤) تؤدي إلى أن:

$$L(\mathbf{x}^* + \mathbf{dx}, \lambda) - L(\mathbf{x}^*, \lambda) = f(\mathbf{x}^* + \mathbf{dx}) - f(\mathbf{x}^*) \tag{٥,٩٥}$$

وحيث إن X^* نهاية صغرى نسبية مشروطة للدالة f(x) فإن:

$$f(\mathbf{x}^* + \mathbf{dx}) - f(\mathbf{x}^*) > 0 \tag{٥,٩٦}$$

تؤدي المعادلتان (٥,٩٥) و (٥,٩٦) إلى العلاقة:

$$L(\mathbf{x}^* + \mathbf{dx}, \lambda) - L(\mathbf{x}^*, \lambda) > 0 \tag{٥,٩٧}$$

يعطي مفكوك متسلسلة تايلور (Taylor) للدالة حول النقطة x^* (باعتبار **l** ثابت) بالصيغة:

$$L(\mathbf{x}^* + \mathbf{dx}, \lambda) = L(\mathbf{x}^*, \lambda) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \lambda)\Big|_{x = \mathbf{x}^*} dx_i$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial x_i \, \partial x_j}\Bigg|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \theta \, \mathbf{dx}} dx_i \, dx_j \qquad (٥, ٩٨)$$

$$0 < \theta < 1$$

وإذا افترضنا أن المشتقات الثانية $\frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial x_i \, \partial x_j}$ متصلة في الجوار المباشر للنقطة x^* ، فإن إشارة الحد الأخير من العلاقة (٥ , ٩٨) :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial x_i \, \partial x_j}\Bigg|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \theta \, \mathbf{dx}} dx_i \, dx_j$$

سوف تكون هي إشارة الحد:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}^*, \lambda)}{\partial x_i \, \partial x_j} dx_i \, dx_j$$

نفسها ولكل التغيرات الصغيرة المقبولة $\mathbf{dx}$ وعلى ذلك فإنه لتحقيق المعادلة (٥ , ٩٦) يجب أن تكون القيمة:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \, \partial x_j} (\mathbf{x}^*, \lambda) \, dx_i \, dx_j > 0$$

لكل التغيرات المقبولة dx_i $(i = 1, 2, \dots, m)$ ، وبهذا يكتمل برهان النظرية.

ملاحظات

وفيما يلي نورد مجموعة من الملاحظات:

ملاحظة (١)

إذا كانت :

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \, \partial x_j} \left(\mathbf{x}^*, \lambda\right) dx_i \, dx_j > 0$$

سالبة لكل الاختيارات للتغيرات المقبولة dx_i ، فإن X^* سوف تكون نقطة نهاية عظمى مشروطة للدالة $f(x)$.

ملاحظة (٢)

لكي تكون الشروط الضرورية للصيغة التربيعية Q والمعرفة بالمعادلة (٥, ٩٤) موجبة (سالبة) محددة لكل التغيرات المقبولة **d x** يجب أن يكون كل جذر Z_i لكثيرة الحدود المعرفة بالمعادلة المحددية التالية موجباً (سالباً) :

$$\begin{vmatrix} (L_{11}-Z) & L_{12} & L_{13} & \cdots & L_{1n} & g_{11} & g_{21} & \cdots & g_{m1} \\ L_{21} & (L_{22}-Z) & L_{23} & \cdots & L_{2n} & g_{12} & g_{22} & \cdots & g_{m2} \\ \vdots & & & & & & & & \\ L_{n1} & L_{n2} & L_{n3} & \cdots & (L_{nn}-Z) & g_{1n} & g_{2n} & \cdots & g_{mn} \\ g_{11} & g_{12} & g_{13} & \cdots & g_{1n} & 0 & 0 & & 0 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \cdots & g_{2n} & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ g_{m1} & g_{m2} & g_{m3} & \cdots & g_{mn} & 0 & 0 & & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (٥, ٩٩)$$

حيث :

$$L_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \, \partial x_j} \left(\mathbf{x}^*, \lambda\right) \qquad (٥, ١٠٠)$$

وأن :

$$g_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \left(\mathbf{x}^*\right) \qquad (٥,١٠١)$$

انظر هانكوك (Hancock 1960) .

ملاحظة (٣)

بعد فك المحددة (٥,٩٩) نحصل على كثيرة حدود من الرتبة (n-m) . إذا كان بعض جذور المعادلة الناتجة سالباً وبعضها الآخر موجباً، فإن النقطة x^* ليست نقطة حدية .

سوف نوضح فيما يلي تطبيقات الشروط الضرورية الكافية لطريقة مضاريب لاجرانج باستخدام بعض الأمثلة .

مثال (٥,١٠)

أوجد النقطة التي تأخذ عندها الدالة :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)$$

قيمة صغرى تحت الشروط :

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$$

الحل

نكوّن دالة لاجرانج

$$L(x_1\ , x_2\ , x_3) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) + \lambda_1\left(x_1 - x_2\right)$$

$$+ \lambda_2\left(x_1 + x_2 + x_3 - 1\right)$$

فإن الشروط الضرورية لإيجاد القيمة الصغرى للدالة **f** تعطى بالعلاقات :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \qquad (٥,١٠٢)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \qquad (٥,١٠٣)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = x_3 + \lambda_2 = 0 \qquad (٥,١٠٤)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x_1 - x_2 = 0 \qquad (٥,١٠٥)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \qquad (٥,١٠٦)$$

بحل المعادلات (٥,١٠٢) – (٥,١٠٦) آنياً نحصل على :

$$x_1^* = x_2^* = x_3^* = \frac{1}{3} \quad , \quad \lambda_1 = 0 \ , \ \lambda_2 = -\frac{1}{3}$$

وتكون أصغر قيمة للدالة عند النقطة $\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ هي $f(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{6}$.

لمعرفة ما إذا كان هذا الحل يمثل فعلاً نهاية صغرى للدالة **f** نطبق الشرط الكافي وذلك بإيجاد عناصر المحددة (٥,٩٩)

$$L_{11} = \left.\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}\right|_{(\mathbf{x}^*, \lambda^*)} = 1 \quad , \quad L_{12} = \left.\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \, \partial x_2}\right|_{(\mathbf{x}^*, \lambda^*)} = 0$$

$$L_{13} = \left.\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \, \partial x_3}\right|_{(\mathbf{x}^*, \lambda^*)} = 0 \quad , \quad L_{11} = \left.\frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \, \partial x_1}\right|_{(\mathbf{x}^*, \lambda^*)} = 0$$

$$L_{22} = \left.\frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}\right|_{(\mathbf{x}^*, \lambda^*)} = 1 \quad , \quad L_{23} = \left.\frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \, \partial x_3}\right|_{(\mathbf{x}^*, \lambda^*)} = 0$$

$$L_{31} = \left.\frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \, \partial x_1}\right|_{(\mathbf{x}^*, \lambda^*)} = 0 \quad , \quad L_{32} = \left.\frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \, \partial x_2}\right|_{(\mathbf{x}^*, \lambda^*)} = 0$$

$$L_{33} = \left.\frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2}\right|_{(\mathbf{x}^*, \lambda^*)} = 1$$

$$g_{11} = \left.\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}^*} = 1 \quad , \quad g_{12} = \left.\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{x}^*} = -1$$

$$g_{13} = \left.\frac{\partial g_1}{\partial x_3}\right|_{\mathbf{x}^*} = 0 \quad , \quad g_{21} = \left.\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}^*} = 1$$

$$g_{22} = \left.\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{x}^*} = 1 \quad , \quad g_{33} = \left.\frac{\partial g_2}{\partial x_3}\right|_{\mathbf{x}^*} = 1$$

وبالتالي تأخذ المحددة (٥ , ٩٩) الصيغة التالية :

$$\begin{vmatrix} 1-Z & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1-Z & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-Z & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (٥ , ١٠٧)$$

وبفك المحددة في الطرف الأيسر نحصل على المعادلة :

$$1 - Z = 0$$

وهذا يعطي :

$$Z = 1$$

وحيث إن قيمة Z موجبة فإن النقطة (x_1^*, x_2^*, x_3^*) والتي حصلنا عليها تناظر نهاية صغرى للدالة .

مثال (١١ , ٥)

أوجد القيمة الصغرى للدالة :

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2$$

تحت القيد :

$$2x_1 + x_2 = 7$$

الحل

لاحظ أن دالة لاجرانج لهذا المثال هي :

$$L(x_1 , x_2 , \lambda) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 + \lambda(2x_1 + x_2 - 7)$$

وهذه تعطي الشروط الضرورية لإيجاد القيمة الصغرى بالمعادلات التالية :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1 - 3) + 2\lambda = 0 \qquad (٥ , ١٠٨)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_2 - 4) + \lambda = 0 \qquad (٥ , ١٠٩)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x_1 + x_2 - 7 = 0 \qquad (٥ , ١١٠)$$

وبحل المعادلات (٥ , ١٠٨) – (٥ , ١١٠) نحصل على :

$$\lambda^* = -1.2 , x_2^* = 3.4 , x_1^* = 1.8 \qquad (٥ , ١٠٨)$$

لمعرفة ما إذا كان هذا الحل مناظراً للقيمة الصغرى للدالة f نبحث الشرط الكافي فنلاحظ أن :

$$L_{11} = \frac{\partial L}{\partial x_1^2}\bigg|_{(\mathbf{x}^*, \lambda^*)} = 2 \quad , \quad L_{12} = \frac{\partial L}{\partial x_1\, \partial x_2}\bigg|_{(\mathbf{x}^*, \lambda^*)} = 0$$

$$L_{21} = \frac{\partial L}{\partial x_2\, \partial x_1}\bigg|_{(\mathbf{x}^*, \lambda^*)} = 0 \quad , \quad L_{22} = \frac{\partial L}{\partial x_2^2}\bigg|_{(\mathbf{x}^*, \lambda^*)} = 2$$

$$g_{11} = \frac{\partial g_1}{\partial x_1}\bigg|_{\mathbf{x}^*} = 2 \quad , \quad g_{12} = \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\bigg|_{\mathbf{x}^*} = 1$$

وبالتالي تأخذ المحددة (٥ , ٩٩) الصيغة :

$$\begin{vmatrix} 2-z & 0 & 2 \\ 0 & 2-z & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (٥ , ١١١)$$

وبإيجاد قيمة المحددة نحصل على المعادلة التالية :

$$3z - 6 = 0$$

ومنها نجد أن :

$$z = 2$$

أي أن قيمة z موجبة ، ولذا فإن النقطة $(x_1^*\ ,\ x_2^*) = (1.83\ ,\ 3.4)$ تناظر نهاية صغرى للدالة .

مثال (٥ , ١٢)

أوجد نقطة على السطح :

$$x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$$

بحيث يكون مربع المسافة بينها وبين نقطة الأصل أصغر ما يمكن .

الحل

إحـــــداثيـــات أي نقـطة على السطح هي (x_1 , x_2 , x_3) . بفـــرض أن $f(x_1 , x_2 , x_3)$ تمثل مربع المسافة بين أي نقطة على السطح ونقطة الأصل، فتأخذ المسألة الصيغة الرياضية وهي إيجاد القيمة الصغرى للدالة :

$$f(x_1 , x_2 , x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \qquad (٥ , ١١٢)$$

تحت القيد :

$$g(x_1 , x_2 , x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0 \qquad (٥ , ١١٣)$$

بتكوين دالة لاجرانج :

$$L(\mathbf{x} , \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda(x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 1)$$

نحصل على :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + 2\lambda x_1 = 0 \qquad (٥ , ١١٤)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + 4\lambda x_2 = 0 \qquad (٥ , ١١٥)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 - 2\lambda x_3 = 0 \qquad (٥ , ١١٦)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0 \qquad (٥ , ١١٧)$$

من المعادلة (٥ , ٦٦) نجد أن $\lambda=1$ وبالتعويض عن قيمة l في المعـادلتين (٥ , ١١٤) و(٥ , ١٥) نجــد أن $x_1 = x_2 = 0$ وبالتـعـويض عن $x_1 = x_2 = 0$ في المعـادلة (٥ , ١١٧) نجد أن $x_3^2 = -1$ أي أن $x_3 = \pm\sqrt{-1}$ وهذا غير ممكن، وبالتالي فإن الحل غير ممكن، أي أن أي حل يجب أن يحتوي على $x_3 = 0$.

إذا كانت $x_1 \neq 0$ ، فمن المعادلة (٥ , ١٤) نحصل على l=-1 ومن المعادلتين (٥ , ١١٥) و (٥ , ١١٦) نحـــصل على $x_2 = x_3 = 0$. ومن المعـــادلة (٥ , ١١٦) وبالتعـويض عن $x_2 = x_3 = 0$ نحـصل على $x_1 = \pm 1$ أي أن النقطتين $(\pm 1,0,0)$

تحققان مجموعة المعادلات (٥,١١٤) - (٥,١١٧) . والآن إذا كانت $x_2 \neq 0$ فمن المعادلة (٥,١١٥) نجد أن $\lambda = \frac{1}{2}$ ، وبالتعويض في المعادلتين (٥,١١٤) و(٥,١١٦) نجد أن $x_1 = x_3 = 0$

ثم بالتعويض في المعادلة (٥,١١٧) نجد أن $x_2 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ وهذا يعني أنه يوجد حلان آخران هما $\left(0 , \pm\sqrt{\frac{1}{2}} , 0\right)$ يحققان الشروط (٥,١٤٤) - (٥,١١٧).

ولمعرفة أي من هذه النقط يكون للدالة $f(x)$ عندها قيمة صغرى تحسب قيم

$$f(\pm 1 , 0 , 0) = 1 \tag{٥,١١٨}$$

$$f\left(0 , \pm\sqrt{\frac{1}{2}} , 0\right) = \frac{1}{2} \tag{٥,١١٩}$$

من المعادلتين السابقتين نجد أن للدالة قيمة صغرى عند النقطتين $\left(0 , \pm\sqrt{\frac{1}{2}} , 0\right)$

أي أن :

$$\left(\mathbf{x}^* , \lambda\right) = \left(0 , \pm\sqrt{\frac{1}{2}} , 0 , \frac{1}{2}\right)$$

وللتأكد من ذلك نستخدم الشرط الكافي :

$$L_{11} = \frac{\partial^2 L\left(\mathbf{x}^* , \lambda^*\right)}{\partial x_1^2} = 3 , L_{12} = \frac{\partial^2 L\left(\mathbf{x}^* , \lambda^*\right)}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 , L_{13} = \frac{\partial^2 L\left(\mathbf{x}^* , \lambda^*\right)}{\partial x_1 \partial x_3} = 0$$

$$L_{21} = \frac{\partial^2 L\left(\mathbf{x}^* , \lambda^*\right)}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 , L_{22} = \frac{\partial^2 L\left(\mathbf{x}^* , \lambda^*\right)}{\partial x_2^2} = 4 , L_{23} = \frac{\partial^2 L\left(\mathbf{x}^* , \lambda^*\right)}{\partial x_2 \partial x_3} = 0$$

$$L_{31} = \frac{\partial^2 L\left(\mathbf{x}^* , \lambda^*\right)}{\partial x_3 \partial x_1} = 0 , L_{32} = \frac{\partial^2 L\left(\mathbf{x}^* , \lambda^*\right)}{\partial x_3 \partial x_2} = 0 , L_{33} = \frac{\partial^2 L\left(\mathbf{x}^* , \lambda^*\right)}{\partial x_3^2} = 1$$

$$g_{11} = \frac{\partial g_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} = 0 \ , g_{12} = \frac{\partial g_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} = 4\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \ , \ g_{13} = \frac{\partial g_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_3} = 0$$

وبالتالي تأخذ المحددة (٥, ٩٩) الصيغة :

$$\begin{vmatrix} 3-z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4-z & 0 & 4\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \\ 0 & 0 & 1-z & 0 \\ 0 & 4\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (٥, ١٢٠)$$

وبفك المحدد(٥, ١٢٠) نحصل على المعادلة

$$(3 - z)\,(1 - z) = 0 \qquad (٥, ١٢١)$$

ومنها نجد أن $z=1$ أو $z=3$ أي أن قيم z موجبة ولذا فإن الحل $\left(0\ ,\ \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\ ,\ 0\right)$ يعطي قيمة صغرى مقدارها $f\left(0\ ,\ \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\ ,\ 0\right) = \frac{1}{2}$ وهندسياً فإن النقط $\left(0\ ,\ +\sqrt{\frac{1}{2}}\ ,\ 0\right)$ و $\left(0\ ,\ -\sqrt{\frac{1}{2}}\ ,\ 0\right)$ تقع على السطح بالشكل (4.42) ويكون مربع المسافة بينهما وبين نقطة الأصل أصغر ما يمكن .

(٥,٥) تمـــــــــارين

استخدم الطريقة المناسبة في إيجاد حل المسائل الآتية :

١- لدينا علبة أسطوانية (لها قاعدة وغطاء) مصنوعة من قشرة معدنية . المطلوب

إيجاد أبعاد هذه العلبة التي تجعل حجمها أكبر ما يمكن بحيث تكون مساحة السطح الكلي لها 24p ، حيث إن p=22/7 .

٢- أوجد القيمة الصغرى لدالة الهدف التالية :

$$f(x_1 , x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$$

تحت القيد :

$$x_1 + x_2 = 6$$

٣- عين أكبر حجم لصندوق على شكل متوازي المستطيلات جوانبه موازية لمستويات الإحداثيات والذي يمكن تكوينه داخل مجسم القطع الناقص :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

٤- أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغري للدالة التالية :

$$f(x_1 , x_2) = x_1 x_2$$

تحت القيد :

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

٥- أوجد القيمة الصغرى والعظمى لدالة الهدف التالية :

$$f(x_1 , x_2 , x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

تحت القيود :

$$\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{5} + \frac{x_3^2}{25} - 1 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

٦- أوجد قيم x_1 , x_2 , x_3 والتي تأخذ عندها دالة الهدف التالية :

$$f(x_1 , x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 x_2$$

قيمة كبرى أو صغرى تحت القيد :

$$x_1^2 + x_2^2 = 4$$

٧- أوجد القيمة الصغرى للدالة :

$$f(x_1 , x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

تحت القيد :

$$(x_1 - 1)^3 - x_3^2 = 0$$

٨- أوجد قيم x_1, x_2, x_3 والتي تجعل دالة الهدف التالية :

$$f(x_1 , x_2 , x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

أصغر ما يمكن تحت القيد :

$$4x_1 + x_2^2 + 2x_3 - 14 = 0$$

٩- طورت شركة إعلانات برنامج منسق لنوعين من المنتجات وقدرت الزيادة في الأرباح بالدالة التالية :

$$f(x_1 , x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + x_1 x_2 + 3x_2$$

حيث x_i هي نفقات الإعلان على المنتج i ، (i=1,2) ، إفرض أن وحدات $f(\mathbf{x})$ و x_i هي مئات آلاف الريالات .

قرر المصنع إنفاق 300,000 ريال على الإعلانات والمطلوب توزيع هذا المبلغ بين المنتجين وتقدير الزيادة في المكسب .

الفصل السادس

البرمجة غير الخطية متعددة المتغيرات وبقيود متراجحة

• مقدمة • الطريقة التقليدية • الطرق المباشرة • الطرق غير المباشرة • تمارين

(٦,١) مقدمة

نناقش في هذا الفصل الطرق المناسبة لحل مسائل البرمجة غير الخطية المقيدة بقيود متراجحة التي يمكن صياغتها على صيغة إيجاد قيم المتغيرات $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ التي تصغر أو تكبر دالة الهدف :

$$z = f(\mathbf{x})$$

وذلك تحت القيود :

$$\mathbf{g}_j(\mathbf{x}) \leq 0 \qquad , j = 1, 2, 3, \ldots, m$$

عرضنا في الفصل السابق طرقاً لحل مثل هذه المسائل في الحالة الخاصة، أي عندما تكون القيود معادلات او في حالة التعبير عن كل قيد بمعادلة .

نتعرض في هذا الفصل للحالة العامة التي تكون القيود فيها إما معادلات أو متراجحات أو الاثنتين معا. توجد عدة طرق لحل مثل هذه المسائل ويمكن تصنيفها إلى ثلاثة أنواع وهي:

أولا: الطريقة التقليدية

تعتمد هذه الطريقة علي شروط كون-توكر (Kuhn-Tucker) ومضاريب لاجرانج، وتعتبر من الطرق المباشرة، وسيكون تصنيفها علي انفراد لاهميتها.

ثانيا: الطرق المباشرة

تتناول هذه الطرق القيود بطرق واضحة، ومن أهمها وأكثرها شيوعا الطرق التالية:

١- الطريقة المركبة (complex method)،

٢- طرق الاتجاهات المقبولة (feasible directions) ومنها:

(أ) طريقة زوتندجك (Zoutendijk)،

(ب) طريقة الاسقاط الإنحداري (gradient projection).

٣- طريقة تقريب القيود أو المستوى القاطع (cutting plane method)

ثالثا: الطرق غير المباشرة

يتم في هذه الطرق تحويل المسألة إلى متتابعة من المسائل غير المقيدة، وتصنف هذه الطرق إلى ما يلي:

١- طرق تحويل المتغيرات (transformation of variables)

٢- طرق الدالة الجزائية (penalty function) وتنقسم إلى:

(أ) طريقة الدالة الجزائية الداخلية (interior).

(ب) طريقة الدالة الجزائية الخارجية (exterior) .

سوف نشرح كيفية استخدام بعض الطرق السابق ذكرها لحل مسائل البرمجة غير الخطية المقيدة بقيود متراجحة في البنود القادمة من هذا الفصل مع توضيح ذلك ببعض الأمثلة .

(٦,٢) الطريقة التقليدية بشروط كون - توكر ومضاريب لاجرانج

لقد استعرضنا في الفصل السابق طريقة استخدام مضاريب لاجرانج لحل مسائل البرمجة ذات القيود المتساوية ، وسنقوم في هذا البند باستخدام هذه المضاريب لحل المسائل بقيود متراجحة ، وذلك بتحويلها إلى قيود معادلات (أو مساواة) بإضافة متغيرات متممة (أو إضافية) (slack variables) إلى المتراجحات لتصبح معادلات ، وتُستخدم هذه الطريقة في المسائل البسيطة بالقيودالمتراجحة .

نعرّف أولا متغيرا متمما μ_j بقيمة حقيقية لكل قيد متراجح ، أي أن :

$$\mu_j^2 = g_j\ (\mathbf{x})\ \geq 0 \qquad j = 1,2,\dots\ , m$$

حيث تتحقق المتراجحة بتحقيق المتساوية ، وذلك لكل قيمة حقيقية للمتغير μ_j ونلاحظ أن دالة لاجرانج تأخذ الصيغة :

$$L(\ \mathbf{x}\ ,\ \lambda\ ,\ \mu\ ) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(g_j(x) - \mu_j^2\right) \qquad (٦,١)$$

بتطبيق شروط لاجرانج الضرورية وهي :

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\ \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0 \quad ,\ i = 1,\ 2,\dots\ ,n \qquad (٦,٢)$$

$$g_j(x^*) = \left(\ \mu_j^*\ \right)^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = g_i(\underline{x}) - \mu^2 = 0 \quad ,\quad j = 1, \dots, m \qquad (٦,٣)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_j} = -2\,\lambda_j \mu_j = 0 \quad , \; j = 1,2,\ldots ,m \qquad (٦,٤)$$

من المعادلة الأخيرة نحصل على $\lambda_j^* = 0$ أو $\mu_j^* = 0$

أو $\lambda_j^* = \mu_j^* = 0$ ، وفيما يلي نناقش الحل المتوقع في الحالات الثلاث.

الحالة الأولى

إذا كان $\lambda_j^* = 0$ و $\mu_j^* \neq 0$ فهذا يعني أننا تجاهلنا القيود $g_j\left(\mathbf{x}\right) \geq 0$ لأن:

$$g_j\left(\mathbf{x}^*\right) = \left(\mu_j^*\right)^2 > 0$$

وبالتـالي فإن الحـل الأمثل لايتغـير بوجود هذا القيد إذا كانت كل $\lambda_j^* = 0$ لجميع قيم j $(j = 1, 2,\ldots, m)$ ومن ذلك نلاحظ أن المعادلة الأولى (2.2) تتحول إلى:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = 0$$

وهو القيد الضروري في حالة مسائل البرمجة غير المقيدة.

الحالة الثانية

إذا كانت $\lambda_j^* \neq 0$ و $\mu_j^* = 0$ فإن هذا يعني $g_j\left(\mathbf{x}^*\right) = 0$ وعندئذ يقع الحل الأمثل على حدود القيد رقم **j** وحيث إن $\lambda_j^* \neq 0$ فإن الحل الأمثل لا يحقق الشرط الضروري $\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$.

الحالة الثالثة

إذا كـــانت $\lambda_j^* = 0$ و $\mu_j^* = 0$ لكـل قـيم **j** فـإن $g_j\left(\mathbf{x}^*\right) = 0$ وعندئـــذ يحـقق الحل الأمـثل العـلاقـة $\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$ أي أن الحل الأمـثل يقع على النقـطة الحـدية (corner point) للقيود.

مثال (١,٦)

أوجد النهايات العظمي والصغري لدالة الهدف:

$$f(x_1 , x_2) = 2x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1$$

تحت القيد:

$$x_1^2 + x_2^2 \le 1$$

الحل

نعرف

$$\mu^2 = 1 - x_1^2 - x_2^2 \ge 0$$

حيث μ عدد حقيقي. تكون، في مثل هذه المسألة، دالة لاجرانج المناظرة هي:

$$L(x_1, x_2, \lambda_2, \mu) = 2x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1 + \lambda(\mu^2 - 1 + x_1^2 + x_2^2)$$

وشروط لاجرانج الضرورية هي:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4x_1 - 2 + 2\lambda x_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -6x_2 + 2\lambda x_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mu^2 - 1 + x_1^2 + x_2^2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = 2\mu\lambda = 0$$

ونميز فيما يلي بين الحالات الثلاث السابق ذكرها.

الحالة الأولى

إذا كانت $\mu = 0$ (حل مقيد) عندئذ تصبح شروط لاجرانج بالصيغة:

$$4x_1 - 2 + 2\lambda x_1 = 0$$

$$x_2 (2 \lambda - 6) = 0$$
$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

من المعادلة الثانية، وبفرض أن $x_2 \neq 0$ ، فإننا نحصل على $\lambda = 3$. ومن المعادلة الأولى نجد أن $x_1 = 0.2$ ومن المعادلة الثالثة $x_2 = \pm \sqrt{0.96}$ وبذلك نكون قد حصلنا على حلّين للمعادلة. بعد ذلك نفرض أن $x_2 = 0$ في المعادلةالثالثة وتكون $x_1 = \pm 1$ ومن ذلك نحصل علي القيمتين المناظرتين للمتغير λ من المعادلة الأولى.

أي أن الحلول لمجموعة المعادلات السابقة هي :

$$x_1^* = 0.2 \,,\quad x_2^* = \pm \sqrt{0.96} \,,\quad \lambda^* = 3 \,,\quad f(x_1^* , x_2^*) = -3.2$$
$$x_1^* = 1 \,,\quad x_2^* = 0 \,,\quad \lambda^* = -1 \,,\quad f(x_1^* , x_2^*) = 0$$
$$x_1^* = -1 \,,\quad x_2^* = 0 \,,\quad ,\lambda^* = -3 \,,\quad f(x_1^* , x_2^*) = 4$$

الحالة الثانية

$\lambda = 0$ (حل غير مقيد)عند ذلك نحصل على :

$$4 x_1 - 2 = 0$$
$$- 6 x_2 = 0$$
$$1 + x_1^2 + x_2^2 = \mu^2$$

ويكون حل هذه المعادلات هو :

$$x_1^* = 0.5 \,،\, x_2^* = 0 \,،\, \mu^2 = 1.25$$

وقيمة الدالة عند هذا الحل :

$$f(x_1^* , x_2^*) = - 0.5$$

مما سبق نلاحظ ان النهاية الصغرى للدالة $f(x_1 , x_2)$ تتحقق عند النقطة ($0.2 , \pm \sqrt{0.96}$) وتكون قيمتها 3.2- والنهاية أوالقيمة العظمى عند (1,0-) والتي تناظر قيمة للدالة مقدارها 4 .

مثال (٦,٢)

أوجد أصغر مسافة من نقطة الأصل إلى النقطة $(x_1 \ , \ x_2)$ تحت القيود التالية :

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \leq 4$$
$$x_1^2 = 4\, x_2^2$$

الحل

دالة الهدف هي :

$$f(x_1 \ , \ x_2) = (x_1 - 0)^2 + (x_2 - 0)^2 = x_1^2 + x_2^2$$

نعرف المتغير المتمم بالصيغة :

$$\mu^2 = 4 - (x_1 - 2)^2 - (x_2 - 3)^2 \geq 0$$

تكون دالة لاجرانج هي :

$$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda_1 [\mu^2 + (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 - 4]$$
$$+ \lambda_2 [x_1^2 - 4\, x_2]$$

فتكون شروط لاجرانج هي

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2\, x_1 + 2\, \lambda_1\, (x_1 - 2) + 2\, \lambda_2\, x_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2\, x_2 + 2\, \lambda_1\, (x_2 - 3) - 4\, \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \mu^2 + (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 - 4 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x_1^2 - 4\, x_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = 2\lambda_1 \mu = 0$$

الحالة الأولى

نفرض أن $\lambda_1 = 0$ فنجد أن :

$$2x_1(1+\lambda_2) = 0$$

$$2x_2 - 4\lambda_2 = 0$$
$$\mu^2 = 4 - (x_1 - 2)^2 - (x_2 - 3)^2$$
$$4x_2 = x_1^2$$

ومن الواضح أنه لا توجد قيم حقيقية للمتغير μ تحقق هذه المعادلات ولذلك ننتقل إلى دراسة الحالة الثانية.

الحالة الثانية

نفرض أن $\mu = 0$ فنجد أن :

$$2x_1 + 2\lambda_1(x_1 - 2) + 2\lambda_2 x_1 = 0$$
$$2x_2 + 2\lambda_1(x_2 - 3) - 4\lambda_2 = 0$$
$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 - 4 = 0$$
$$x_1^2 - 4x_2 = 0$$

بحل المعادلتين الأخيرتين آنيًا نحصل علي حلين، وهما الحل الأول (2.1) ويناظر النهاية الصغرى وقيمتها $f(x_1^*, x_2^*) = 5$ والحل الثاني عند النقطة (3.86,3.76) الذي يناظر "تقريبا" النهاية العظمى ومقدارها $f(x_1^*, x_2^*) = 28.73$.

شروط كون – توكر

سوف نشرح هنا كيفية اشتقاق شروط كون – توكر (Kuhn-Tucker) الاستقرارية (stationary) وذلك لإيجاد الحل الأمثل لمسائل البرمجة المقيدة ذات القيود المتراجحة.

نظرية (٦,١) (نظرية كون – توكر):

الشروط الضرورية لإيجاد النهاية الصغرى للدالة: $z = f(\mathbf{x})$

تحت القيود:

$$x_i \geq 0 \qquad , i = 1,2,\dots ,m$$

هي:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) \geq 0 \qquad (٦,٥)$$

$$(\mathbf{x}^*)^T \nabla f(\mathbf{x}^*) = 0 \qquad (٦,٦)$$

$$\mathbf{x}^* \geq 0 \qquad (٦,٧)$$

البرهان

لإثبات هذه النظرية نستخدم مفكوك تايلور للدالة $f(\mathbf{x})$ حول النقطة $\mathbf{x}^*$ فنجد أن:

$$f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}\,\Delta\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + \mathbf{h}\,\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}}\,\Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}\,\mathbf{h}^2\,(\Delta\mathbf{x})\,H(\mathbf{x}^* + \theta\mathbf{h}\,\Delta\mathbf{x})\,\Delta\mathbf{x}$$

حيث H هي مصفوفة هس (Hess) وأن $0 < \theta < 1$.

لكي تكون $\mathbf{x}^*$ هي النقطة التي تكون للدالة عندها نهاية صغرى يجب أن يكون:

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}\,\Delta\mathbf{x})$$

أي أن:

$$h\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}^*)\,\Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}h^2(\Delta\mathbf{x})\,H(x^* + \theta\,h\,\Delta\mathbf{x}) \geq 0$$

وهو القيد الضروري لكي تكون للدالة نهايه صغرى موضعيـة عند $\mathbf{x}^*$. فإذا كـانت $\mathbf{x}^* > 0$ نقطة حل داخليـة (interior) فـإن المتـبـاينة الأسـاسـيـة تؤدي إلى القـيـود الضروريةالتي من الرتبة الأولى:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*) = 0 \qquad (j = 1,2,3,...,n)$$

وباعتبار أن بعض المتغيرات لها قيم مثلى على الحدود فإن $x_j^* = 0$ ، وبافتراض أن كل المشتقات الجزئية تساوي صفراً فإن المتباينة الأساسية تخفض إلى:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*)\Delta x_j \geq 0$$

ولكن يجب أن تكون Δx_j موجبة (حيث إن $x_j^* = 0$) التي تؤدي إلى القيد الضروري $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*) \geq 0$ فإذا كانت x_j^* علي حدود القيد أي أن $x_j^* = 0$ ، وحيث إن المشتقات تختفي عند الحلول الداخلية فإنه يمكن كتابة:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*)\,x_j^* = 0 \qquad (j = 1, 2, 3,..., n)$$

وبهذا يتم إثبات النظرية.

توضح النظرية السابقة طريقة ايجاد القيمة الصغرى لدالة تحت القيود وبمتغيرات غير سالبة، وذلك بإشتقاق شروط كون - توكر المناظرة لها. فيما يلي نشرح كيفية اشتقاق شروط كون - توكر لبعض الحالات الأخرى التي تظهر في مسائل الأمثلية.

نفرض مثلا أن المسألة المطلوبة هي إيجاد القيمة الصغرى للدالة.

$$z = f(\mathbf{x}) \tag{٦,٩}$$

تحت القيود :

$$g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad , j = 1,2, \dots, m \tag{٦,١٠}$$

علما بأن : $f(\mathbf{x}) \quad , \quad g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad , j = 1,2, \dots, m$

دوال تفاضلية (أي قابلة للتفاضل)، والآن نحول الشروط (أو القيود) من متباينات إلى معادلات. يمكن النظر إلى هذه المسألة على أنها إحدى صيغ المسألة العامة، التي سنستخدمها لاشتقاق شروط كون - توكر الاستقرارية للصيغ الاخرى.

لاحظ أنه بإضافة متغيرات متممة $\mu_j \geq 0$ تصبح المسألة عبارة عن إيجاد القيمة الصغرى للدالة :

$$z = f(\mathbf{x})$$

تحت القيود :

$$\mu_j + g_j(\mathbf{x}) = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, m$$

$$\mu_j \geq 0 \quad , \quad j = 1,2, \dots, m$$

وتكون دالة لاجرانج لهذه المسألة هي :

$$L(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [\mu_j + g_j(\mathbf{x})]$$

بتطبيق القيود الضرورية على $\mathbf{x}$, λ وبتطبيق الشروط الضرورية (٦,٥) - (٦,٧) من النظرية السابقة علي المتغيرات μ_j وذلك لأنها تمثل قيودا غير سالبة، سنحصل على :

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) = 0 \quad , i = 1, 2, \dots, n$$

$$z = f(\mathbf{x}) \qquad (٦,٩)$$

تحت القيود :

$$g_j(\mathbf{x}) \le 0 \quad , j = 1,2, \dots, m \qquad (٦,١٠)$$

علما بأن : $f(\mathbf{x}) \;,\; g_j(\mathbf{x}) \le 0 \quad , j = 1,2, \dots, m$

دوال تفاضلية (أي قابلة للتفاضل)، والآن نحول الشروط (أو القيود) من متباينات إلى معادلات. يمكن النظر إلى هذه المسألة على أنها إحدى صيغ المسألة العامة، التي سنستخدمها لاشتقاق شروط كون - توكر الاستقرارية للصيغ الاخرى.

لا حظ أنه بإضافة متغيرات متممة $\mu_j \ge 0$ تصبح المسألة عبارة عن إيجاد القيمة الصغرى للدالة :

$$z = f(\mathbf{x})$$

تحت القيود :

$$\mu_j + g_j(\mathbf{x}) = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, m$$

$$\mu_j \ge 0 \quad , \quad j = 1,2, \dots, m$$

وتكون دالة لاجرانج لهذه المسألة هي :

$$L(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [\mu_j + g_j(\mathbf{x})]$$

بتطبيق القيود الضرورية على $\mathbf{x}$, λ وبتطبيق الشروط الضرورية (٦,٥) - (٦,٧) من النظرية السابقة علي المتغيرات μ_j وذلك لأنها تمثل قيودا غير سالبة، سنحصل على :

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) = 0 \qquad , i = 1, 2, \dots, n$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = \mu_j^* + g_j(\mathbf{x}^*) = 0 \\ &\frac{\partial L}{\partial \mu_j} = \lambda_j^* \geq 0 \\ &\mu_j^* \ \frac{\partial L}{\partial \mu_j} = \mu_j^* \ \lambda_j^* = 0 \\ &\mu_j^* \geq 0 \end{aligned}\right\} \quad , \quad j = 1\ ,2\ , \ldots\ , m$$

بحذف μ_j^* من المعادلات السابقة نحصل على :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) = 0 \qquad , i = 1, 2, \ldots, n \qquad (٦ , ١١)$$

$$g_j(\mathbf{x}^*) \leq 0 \qquad , j = 1,2,\ldots,m \qquad (٦ , ١٢)$$

$$\lambda_j^* \ g_j(\mathbf{x}^*) = 0 \qquad , j = 1,2,\ldots,m \qquad (٦ , ١٣)$$

$$\lambda_j^* \geq 0 \qquad , j = 1,2,\ldots,m \qquad (٦ , ١٤)$$

المعادلات (٦ , ١١) - (٦ , ١٤) تمثل شروط كون - توكر الاستقرارية الخاصة بالمسألة المعطاه بالمعادلات (٦ , ٩) و (٦ , ١٠) التي سوف نطلق عليها المسألة القياسية (canonical) .

الجدير بالذكر أنه مع إمكانية اشتقاق هذه القيود بسهولة في معظم الحالات ، إلا أنها قد لا تكون مفيدة جدا في إيجاد النقطة المثلى لبعض الحالات ، وذلك لاحتوائها على متراجحات قد تكون غير خطية وربما تؤدي إلى صعوبة في الحسابات وخصوصا عندما يكون عدد المتغيرات كبيرا مما يجعل الحل المباشر لهذه المعادلات لا يحقق غالبا جميع القيود .

سوف نوضح فيما يلي اشتقاق شروط كون - توكر المستقرة في الثلاث صيغ الأخرى للمسألة العامة باستخدام الصيغة القياسية

الصيغة الأولى

أوجد القيمة العظمى أو الكبرى للدالة
$f(\mathbf{x})$

تحت القيود:

$$g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \qquad , j = 1,2,\ldots,m$$

لاحظ أن:

$$\text{Max } f(\mathbf{x}) = \text{Min } (-f(\mathbf{x}))$$

لذا فإن القيود الضرورية لهذه المسألة يمكن الحصول عليها بالتعويض عن $f(\mathbf{x})$ في المعادلات (٦ , ١١) - (٦ , ١٤) فنحصل على:

$$-\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) = 0 \qquad , i = 1,2,\ldots,n$$

أو:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} (-\lambda_j^*) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) = 0 \qquad , i = 1,2,\ldots,n$$

بتغيير إشارة λ_j^* ، فإن القيود لهذه المسألة تصبح:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) = 0 \quad , i = 1, 2,\ldots, n \qquad (٦ , ١٧)$$

$$g_j(\mathbf{x}^*) \leq 0 \qquad , j = 1,2,\ldots,m \qquad (٦ , ١٨)$$

$$(\lambda_j^*)\, g_j(\mathbf{x}^*) = 0 \qquad , j = 1,2,\ldots,m \qquad (٦ , ١٩)$$

$$\lambda_j^* \leq 0 \qquad , j = 1,2,\ldots,m \qquad (٦ , ٢٠)$$

الصيغة الثانية

إيجاد القيمة الصغرى للدالة:

$$f(\mathbf{x}) \qquad (٦,٢١)$$

تحت القيود:

$$g_j(\mathbf{x}) \geq 0 \qquad , j = 1,2,\ldots,m \qquad (٦,٢٢)$$

بتغيير إشارة $g_j(\mathbf{x})$ في المعادلات (٦,١١) - (٦,١٤) نحصل على

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} (-\lambda_j^*) \frac{\partial g_j}{\partial x_i} (\mathbf{x}^*) = 0 \quad , i = 1, 2,\ldots, n$$

$$g_j(\mathbf{x}) \geq 0 \qquad , j = 1,2,\ldots,m$$

وبذلك تصبح القيود الضرورية هي:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \frac{\partial g_j}{\partial x_i} (\mathbf{x}^*) = 0 \quad , i = 1, 2,\ldots, n \qquad (٦,٢٣)$$

$$g_j(\mathbf{x}^*) \geq 0 \qquad , j = 1,2,\ldots,m \qquad (٦,٢٤)$$

$$(\lambda_j^*)\, g_j(\mathbf{x}^*) = 0 \qquad , j = 1,2,\ldots,m \qquad (٦,٢٥)$$

$$\lambda_j^* \leq 0 \qquad , j = 1,2,\ldots,m \qquad (٦,٢٦)$$

الصيغة الثالثة

إيجاد القيمة العظمى للدالة:

$$f(\mathbf{x}) \qquad (٦,٢٧)$$

تحت القيود:

$$g_j(\mathbf{x}) \geq 0 \qquad , j = 1,2,\ldots,m \qquad (٦,٢٨)$$

وبتغيير إشارة كل من $f(\mathbf{x})$ ، $g_j(\mathbf{x})$ في الصيغة القياسية نحصل على:

$$-\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) - \sum_{j=1}^{m} (-\lambda_j^*) \frac{\partial g_j}{\partial x_i} (\mathbf{x}^*) = 0 \quad , i = 1, 2,\ldots, m$$

وبذلك تصبح القيود الضرورية هي :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \frac{\partial g_j}{\partial x_i} (\mathbf{x}^*) = 0 \quad , i = 1, 2,\ldots, n \qquad (٦,٢٩)$$

$$g_j(\mathbf{x}^*) \geq 0 \qquad , j = 1,2,\ldots,m \qquad (٦,٣٠)$$

$$(\lambda_j^*)\, g_j(\mathbf{x}^*) = 0 \qquad , j = 1,2,\ldots,m \qquad (٦,٣١)$$

$$\lambda_j^* \geq 0 \qquad , j = 1,2,\ldots,m \qquad (٦,٣٢)$$

وتجدر الإشارة إلى أن شروط كون - توكر الاستقرارية التي اشتقت في حالة الصيغة القياسية والصيغ الثلاث الاخرى تكون ضرورية وكافية إذا كانت $f(\mathbf{x})$، $g_j(\mathbf{x})$ دوالا محدبة (convex) ، وهذا متوقع لأن هذه القيود تؤكد أن النهاية الصغرى الموضعية (local) هي أيضا نهاية صغرى كلية (global) .

نلاحظ كذلك أنه إذا كانت $f(\mathbf{x})$ دالة حادة التحدب فإن النهاية الصغرى تكون وحيدة كذلك .

سنورد فيما يلي بعض الأمثلة التي توضح مدى صعوبة حل مثل هذه المسائل باستخدام شروط كون - توكر عندما يكون عدد المتغيرات كبيراً .

مثال (٦,٣)

تعاقدت شركة تصنيع وحدات كهربائية على تزويد أحد محلات التوزيع بكمية مقدارها 50 وحدة في نهاية الشهر الأول، وكذلك 50 وحدة في نهاية الشهر الثاني، و 50 وحدة في نهاية الشهر الثالث، علما بأن تكلفة إنتاج $\mathbf{x}$ وحدة في أي شهر هي x^2 ، وكان يمكن للمصنع إنتاج عدد أكبر من الوحدات المطلوبة في كل

شهر وتخزينها للشهر التالي، علما بأن تكاليف التخزين 20 ريالا لكل وحدة إذا أنتجت في شهر وصدرت إلى محل التوزيع في الشهر التالي. بافتراض انه لايوجد تخزين قبل بداية الشهر الأول. أوجد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها في كل شهر من أجل تصغير التكاليف الكلية.

الحل

نفرض أن x_1 , x_2 , x_3 تمثل عدد الوحدات المنتجة في الشهور الأول والثاني والثالث علي الترتيب. عندئذ فإن التكاليف الكلية المطلوب تصغيرها تعطى بالعلاقة :

التكاليف الكلية = تكاليف الانتاج + تكاليف التخزين.

أي أن:

$$f(x_1 , x_2 , x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 20\,(x_1 - 50) + 20\,(x_1 + x_2 - 100)$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 40\,x_1 + 20\,x_2 - 3000$$

تحت القيود التالية:

$$g_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 - 50 \geq 0$$
$$g_2(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 - 100 \geq 0$$
$$g_3(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 150 \geq 0$$

يمكن تعيين شروط كون - توكر كما يلي:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_i} + \lambda_3 \frac{\partial g_3}{\partial x_i} = 0 , \; i = 1,2,3$$

أي أن:

$$2\,x_1 + 40 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \qquad (٦,٣٣)$$

$$2\,x_2 + 20 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \qquad (٦,٣٤)$$

$$2\,x_3 + \lambda_3 = 0 \qquad (٦,٣٥)$$

$$\lambda_j\, g_j(x_1,x_2,x_3) = 0 \quad , \ j = 1,2,3$$

أي أن :

$$\lambda_1(x_1 - 50) = 0 \qquad (٦,٣٦)$$

$$\lambda_2(x_1 + x_2 - 100) = 0 \qquad (٦,٣٧)$$

$$\lambda_3(x_1 + x_2 + x_3 - 150) = 0 \qquad (٦,٣٨)$$

$$g_j(x_1,x_2,x_3) \geq 0 \quad , \ j = 1,2,3$$

ومن ذلك تكون :

$$x_1 - 50 \geq 0 \qquad (٦,٣٩)$$

$$x_1 + x_2 - 100 \geq 0 \qquad (٦,٤٠)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - 150 \geq 0 \qquad (٦,٤١)$$

$$\lambda_j \leq 0 \quad , j = 1,2,3$$

أو تكتب :

$$\lambda_1 \leq 0 \qquad (٦,٤٢)$$

$$\lambda_2 \leq 0 \qquad (٦,٤٣)$$

$$\lambda_3 \leq 0 \qquad (٦,٤٤)$$

والآن نوضح الصعوبات المرافقة لحل هذه المسألة . يتضح من المعادلة (٦,٣٦) أن :

$\lambda_1 = 0$ أو $x_1 = 50$.

الحالة الأولى

إذا كانت $\lambda_1 = 0$ ، فمن المعادلات (٦,٣٣) (٦,٣٥) نحصل على :

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= -\frac{\lambda_3}{2} \\ x_2 &= -10 - \frac{\lambda_2}{2} - \frac{\lambda_3}{2} \\ x_1 &= -20 - \frac{\lambda_2}{2} - \frac{\lambda_3}{2} \end{aligned}\right\} \quad (٦,٤٥)$$

بالتعويض من مجموعة المعادلات (٦,٤٥) في المعادلتين (٦,٣٧) و(٦,٣٨) نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_2(-130 - \lambda_2 - \lambda_3) &= 0 \\ \lambda_3(-180 - \lambda_2 - \frac{3}{2}\lambda_3) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (٦,٤٦)$$

لاحظ أنه توجد أربعة حلول ممكنة لمجموعة المعادلات (٦,٤٦):

الحل الأول

$$-180 - \lambda_2 - \frac{3}{2}\lambda_3 = 0 \ , \ \lambda_2 = 0$$

أي أن:

$$\lambda_3 = -120 \ , \quad \lambda_2 = 0$$

بالتعويض في قيم المتغيرات بدلالة قيم $\lambda_3 , \lambda_2 , \lambda_1$ نحصل على:

$$x_1 = 40 \ , \ x_2 = 50 \ , \ x_3 = 60$$

ويحقق هذا الحل المعادلات (٦,٤٢) - (٦,٤٤) ,ولكنه لا يحقق المعادلتين (٦,٣٩) و(٦,٤٠).

الحل الثاني

$$-130 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \ , \lambda_3 = 0$$

أي أن $\lambda_3 = 0$ و $\lambda_2 = -130$ وبالتعويض كذلك نجد أن :

$$x_1 = 45 \quad , x_2 = 55 \quad , x_3 = 0$$

ويحقق هذا الحل المعادلات (٦,٤٢) - (٦,٤٤) ولكنه لا يحقق المعادلات (٦,٣٩) - (٦,٤١).

الحل الثالث

$$\lambda_3 = 0 \text{ و } \lambda_2 = 0$$

وبالتعويض نجد أن قيم المتغيرات هي :

$$x_1 = -20 \quad , \quad x_2 = -10 \quad , \quad x_3 = 0$$

ويحقق هذا الحل كذلك المعادلات (٦,٤٢) - (٦,٤٤) ولكنه لا يحقق المعادلات من (٦,٣٩) - (٦,٤١).

الحل الرابع

$$-180 - \lambda_2 - \frac{3}{2}\lambda_3 = 0 \ , \ -130 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

$$-180 - \lambda_2 - \frac{3}{2}\lambda_3 = 0 \ , \ -130 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

أي أن :

$$\lambda_2 = -30 \text{ و } \lambda_3 = -100$$

وبالتعويض كذلك نجد أن :

$$x_1 = 45 \quad , x_2 = 55 \quad , x_3 = 50$$

وبالمثل نجد أن هذا الحل يحقق المعادلات (٦,٤٢) - (٦,٤٤)، ولكنه لا يحقق المعادلات (٦,٣٩) - (٦,٤١).

الحالة الثانية

إذا كانت $x_1 = 50$ فيمكن إذن كتابة المعادلات من (٦,٣٣) إلى (٦,٣٥) بالصيغ التالية:

$$\begin{cases} \lambda_3 = -2x_3 \\ \lambda_2 = -20 - 2x_2 - \lambda_3 = -20 -2x_2 + 2x_3 \\ \lambda_1 = -140 - 2x_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = -120 + 2x_2 \end{cases} \quad (٦,٤٧)$$

بالتعويض من المعادلات (٦,٤٧) في المعادلتين (٦,٣٧) و(٦,٣٨) نحصل على:

$$\begin{cases} (-20 -2x_2 + 2x_3)(x_1 + x_2 -100) = 0 \\ (-2x_3)(x_1 + x_2 + x_3 - 150) = 0 \end{cases} \quad (٦,٤٨)$$

لاحظ أنه يوجد أربع حالات لحل المعادلتين (٦,٤٨).

الحل الأول

$$- 20 - 2x_2 + 2x_3 = 0 , \quad x_1 + x_2 + x_3 - 150 = 0$$

أي أن:

$$x_1 = 50 , x_2 = 45 , x_3 = 55$$

ولا يحقق هذا الحل المعادلة (٦,٤٠).

الحل الثاني

$$- 20 - 2x_2 + 2x_3 = 0 , \quad - 2 x_3 = 0$$

أي أن:

$$x_1 = 50 , x_2 = -10 , x_3 = 0$$

ولا يحقق هذا الحل المعادلتين (٦,٤٠ و ٦,٤١).

الحل الثالث

$$x_1 + x_2 - 100 = 0 \quad , \; -2x_3 = 0$$

أي أن :

$$x_1 = 50 \; , \; x_2 = 50 \; , \; x_3 = 0$$

ولا يحقق هذا الحل المعادلة (٦,٤١).

الحل الرابع

$$x_1 + x_2 - 100 = 0 \quad , \; x_1 + x_2 + x_3 - 150 = 0$$

أي أن :

$$x_1 = 50 \; , \; x_2 = 50 \; , \; x_3 = 50$$

ويحقق هذا الحل جميع القيود من (٦,٣٩) إلى (٦,٤١) ومن المعادلات (٦,٤٧) نحصل على قيم λ_1 , λ_2 , λ_3 المناظرة لهذا الحل وهي :

$$\lambda_1 = -20 \; , \; \lambda_2 = -20 \; , \; \lambda_3 = -100$$

وحيث إن قيم λ_j , $j = 1, 2, 3$ تحقق المعادلات (٦,٤٢) إلى (٦,٤٤) فإن الحل الأمثل هو :

$$x_1^* = 50 \; , \; x_2^* = 50 \; , \; x_3^* = 50$$

ومن ذلك تكون قيمة دالة الهدف هي :

$$f(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 7500 \text{ ريال}$$

شروط كون-توكر الإستقرارية للمسائل التي تحتوي على متراجحات ومعادلات وجميع متغيرات دالة الهدف موجبة:

يمكن صياغة هذا النوع من المسائل في الصورة العامة كما يلي :

أوجد القيمة الصغرى للدالة :

$$z = f(\mathbf{x}) \qquad (٦,٤٩)$$

تحت القيود:

$$g_j(\mathbf{x}) \le 0 \qquad , j = 1,2,....,k \tag{٦,٥٠}$$

$$w_l(\mathbf{x}) = 0 \qquad , l = 1\ ,\ 2\ ,\ ...\ ,\ s \tag{٦,٥١}$$

$$x_i \ge 0 \qquad , i = 1,2,....,n \tag{٦,٥٢}$$

لجميع قيم x_i الحقيقية.

نعرف الدالة:

$$L(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = f(\mathbf{x}) + \lambda^T w(\mathbf{x}) + \mu^T g(\mathbf{x})$$

ولكي تكون x^* قيمة صغرى للدالة (٦,٤٩) تحت القيود (٦,٥٠) إلى (٦,٥٢) فإن القيود الاستقرارية هي:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i} + \sum_{\ell=1}^{S} \mu_\ell \frac{\partial w(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} \ge 0$$

$$, i = 1,2,...,n \tag{٦,٥٣}$$

$$g_j(\mathbf{x}^*) \le 0 \qquad , (j= 1,2,...,k) \tag{٦,٥٤}$$

$$\mu_l^* \ge 0 \qquad , (l = 1,2,...,s) \tag{٦,٥٥}$$

$$x_i^* \ge 0 \qquad , (i = 1,2,...,n) \tag{٦,٥٦}$$

$$w(\mathbf{x}^*) = 0 \tag{٦,٥٧}$$

$$\left(\mathbf{x}^*\right)^T \nabla_x L\left(\mathbf{x}^*, \lambda^*, \mu^*\right) = 0 \tag{٦,٥٨}$$

$$\left(\mu^*\right)^T g(x^*) = 0 \tag{٦,٥٩}$$

سوف يوضح المثال التالي طريقة حل مثل هذا النوع من المعادلات.

مثال (٦,٤)

باستخدام قيود كون-توكر الاستقرارية أوجد أصغر قيمة للدالة:

$$f(x_1, x_2) = \left(x_1 - 1\right)^2 + \left(x_2 - 2\right)^2$$

تحت القيود:

$$x_2 - x_1 = 1,$$
$$x_2 + x_1 \leq 2,$$
$$x_1 \geq 0,$$
$$x_2 \geq 0$$

ثم عبر عن الحل بالرسم.

الحل

نعرف دالة لاجرانج:

$$L(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = (x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 + \lambda(x_2-x_1-1) + \mu(x_1+x_2-2)$$

ومن القيود الضرورية وتطبيق القيد (٦,٥٣) نحصل على:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1-1) - \lambda + \mu \geq 0 \qquad (٦,٦٠)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_2-2) + \lambda + \mu \geq 0 \qquad (٦,٦١)$$

من القيد (٦,٥٢) نحصل على:

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0 \qquad (٦,٦٢)$$

من القيد (٦,٥٨) نحصل على:

$$x_1[2(x_1-1) - \lambda + \mu] = 0 \qquad (٦,٦٣)$$

$$x_2[2(x_2-2) + \lambda + \mu] = 0 \qquad (٦,٦٤)$$

من القيد (٦,٥٤) نحصل على:

$$x_1 + x_2 - 2 \leq 0 \qquad (٦,٦٥)$$

تحت القيود:

$$x_2 - x_1 = 1,$$
$$x_2 + x_1 \leq 2,$$
$$x_1 \geq 0,$$
$$x_2 \geq 0$$

ثم عبر عن الحل بالرسم.

الحل

نعرف دالة لاجرانج:

$$L(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = (x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 + \lambda(x_2-x_1-1) + \mu(x_1+x_2-2)$$

ومن القيود الضرورية وتطبيق القيد (٦,٥٣) نحصل على:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1-1) - \lambda + \mu \geq 0 \qquad (٦,٦٠)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_2-2) + \lambda + \mu \geq 0 \qquad (٦,٦١)$$

من القيد (٦,٥٢) نحصل على:

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0 \qquad (٦,٦٢)$$

من القيد (٦,٥٨) نحصل على:

$$x_1[2(x_1 - 1) - \lambda + \mu] = 0 \qquad (٦,٦٣)$$

$$x_2[2(x_2 - 2) + \lambda + \mu] = 0 \qquad (٦,٦٤)$$

من القيد (٦,٥٤) نحصل على:

$$x_1 + x_2 - 2 \leq 0 \qquad (٦,٦٥)$$

من القيد (٦,٥٥) نحصل على:

$$\mu \geq 0 \qquad (٦,٦٦)$$

من القيد (٦,٥٦) نحصل على:

$$\mu [x_1 + x_2 - 2] = 0 \qquad (٦,٦٧)$$

من القيد (٦,٥٧) نحصل على:

$$x_2 - x_1 - 1 = 0 \qquad (٦,٦٨)$$

لحل هذه المعادلات، نفترض أولاً أن: $x_1 \neq 0$ و $x_2 \neq 0$ و $\mu = 0$

عندئذ نحل المعادلات (٦,٦٢)، (٦,٦٣) و (٦,٦٧) فنجد أن:

$$2(x_1 - 1) - \lambda = 0$$
$$2(x_2 - 2) + \lambda = 0$$
$$x_2 - x_1 - 1 = 0$$

وهذا يؤدي إلى:

$$x_1^* = 1 \quad ، \quad x_2^* = 2 \quad ، \quad \lambda^* = 0$$

هذا الحل لا يحقق المتباينة (٦,٦٥) أي أن:

$$1 + 2 - 2 \leq 0$$

أي أن:

$$1 \leq 0$$

والآن افترض أن $\mu \neq 0$ وحل المعادلات (٦,٦١)، (٦,٦٣)، (٦,٦٧) آنيا:

$$x_1 + x_2 - 2 = 0$$
$$x_2 - x_1 - 1 = 0$$
$$2(x_1 - 1) - \lambda + \mu = 0$$
$$2(x_2 - 2) + \lambda + \mu = 0$$

وهذا يؤدي إلى:

$$x_1^* = \frac{1}{2} \quad , \quad x_2^* = \frac{3}{2} \quad , \quad \mu^* = 1 \quad ; \quad \lambda^* = 0$$

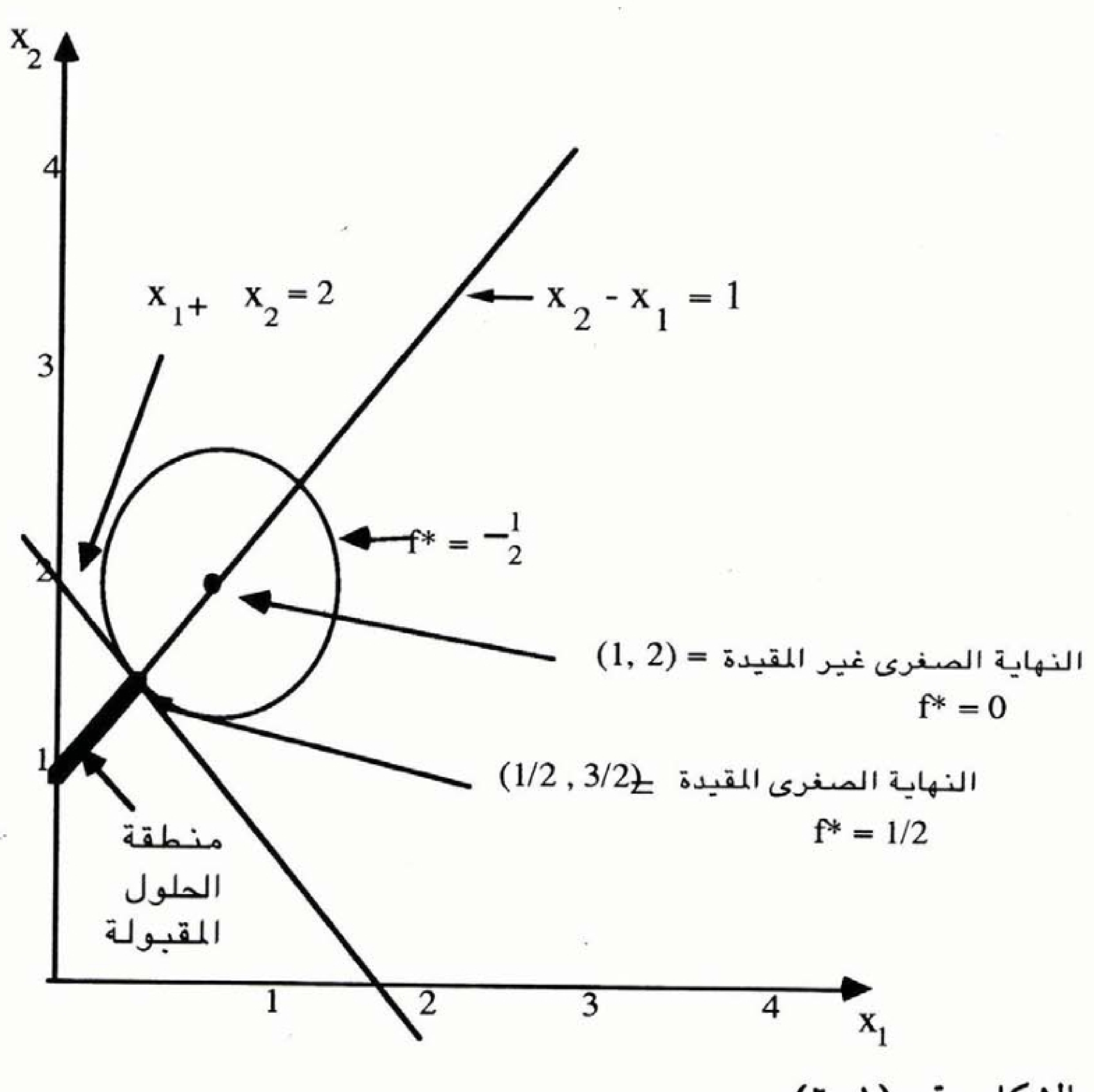
وتكون قيمة الدالة :

$$f\left(x_1^*, x_2^*\right) = \frac{1}{2}$$

باختبار المعادلة (٦,٦١) والمعادلة (٦,٦٤) نجد أن :

$$x_1^* \geq 0 \ , \ x_2^* \geq 0 \ , \ \mu \geq 0$$

وبهذا نكون قد حصلنا على الحل كما يوضح الشكل (١,٦).



الشكل رقم (١,٦).

(٦,٣) الطرق المباشرة

ذكرنا سابقا أن الطرق المباشرة تتناول القيود بطريقة واضحة، وسوف ندرس فيما يلي بعضاً منها :

(٦,٣,١) طرق الاتجاهات المقبولة

تعتمد هذه الطرق على فلسفة الطرق غير المقيدة نفسها التي نوقشت في الفصل الرابع (مثل طريقة بحث النمط) ولكنها صممت لكي تعالج المسائل ذات القيود المتراجحة. الفكرة الاساسية فيها هي اختيار نقطة بداية تحقق جميع الشروط وتتحرك إلى نقطة أفضل طبقا للعلاقة التكرارية الآتية :

$$\mathbf{x}_{i+1}=\mathbf{x}_i+\lambda\mathbf{S}_i \qquad (٦,٦٩)$$

حيث $\mathbf{x}_i$ نقطة بداية للتكرار رقم i و $\mathbf{S}_i$ هو اتجاه التحرك و λ هو طول الخطوة، و $\mathbf{x}_{i+1}$ هي النقطة النهائية التي تم الحصول عليها في نهاية التكرار رقم i ، ويتم اختيار λ بحيث إن $\mathbf{x}_{i+1}$ تقع في منطقة الحلول الممكنة كما يتم اختيار اتجاه البحث $\mathbf{S}_i$ بحيث إن :

(أ) أي حركة صغيرة في هذا الاتجاه لا تنتهك أي شرط .

(ب) دالة الهدف تتحسن في هذا الاتجاه .

النقطة الجديدة $\mathbf{x}_{i+1}$ تؤخذ على أنها نقطة بداية للتكرار التالي، وتعاد جميع الخطوات بحيث يمكن الحصول علي اتجاه يحقق أ، ب. بصفة عامة، تعرف هذه النقطة بأنها نقطة نهاية صغرى (أو كبرى) محلية للمسألة، وليس من الضروري لهذه النهاية الصغرى المحلية أن تكون نهاية صغري كلية ؛ إلا إذا كانت المسألة محدبة. ويسمى الاتجاه الذي يحقق الخاصيتين أ، ب بالاتجاه المقبول الصالح للاستعمال. لهذا السبب سميت هذه الطرق بطرق الاتجاه المقبول .

سيكون الاتجاه S اتجاها مقبولا عند النقطة $\mathbf{x}_i$ إذا حقق العلاقة التالية :

$$\frac{d}{d\lambda} g_j(\mathbf{x}_i + \lambda \mathbf{s}) \Big|_{\lambda=0} = \mathbf{s}^T \nabla g_j(\mathbf{x}_i) \le 0 \qquad (٦,٧٠)$$

حيث تتحقق علامة التساوي فقط إذا كان القيد خطيا أو كامل التحدب . ويسمى الاتجاه s الاتجاه الصالح للاستعمال إذا حقق العلاقتين التاليتين :

$$\frac{d}{d\lambda} f(\mathbf{x}_i + \lambda \mathbf{s}) \Big|_{\lambda=0} = s^T \nabla f(\mathbf{x}_i) \le 0 \qquad (٦,٧١)$$

$$\frac{d}{d\lambda} g_j(\mathbf{x}_i + \lambda \mathbf{s}) \Big|_{\lambda=0} = \mathbf{s}^T \nabla g_j(\mathbf{x}_i) \le 0 \qquad (٦,٧٢)$$

تعطي تفاصيل الإجراءات التكرارية لطرق الاتجاهات المقبولة في طريقة زوتندجك (Zoutendijk)، أو في طريقة الإسقاط الانحداري، وسوف نستعرض فيما يلي الطريقة الأولي .

طريقة زوتندجك

تختلف طرق الاتجاهات المقبولة فيما بينها في الطريقة التي يحصل بها على الاتجاه المقبول الصالح . وفي هذه الطريقة يؤخذ هذا الاتجاه علي أنه الميل السالب إذا كانت نقطة البداية لهذا التكرار تقع داخل منطقة الحلول المقبولة وليست على حدودها ، أما إذا وقعت نقطة البداية على حدود منطقة الحلول المقبولة ، فإن بعض القيود سوف تكون فعالة ، ويمكن إيجاد الاتجاه المقبول الصالح ليحقق المعادلتين (٦,٧١) و (٦,٧٢) .

يمكن وصف النهج أو الأسلوب التكراري لطريقة زوتندجك كالتالي :

الخوارزمية

(أ) إبدأ بنقطة $\mathbf{x}_1$ واخترقيما صغيرة $\varepsilon_1 , \varepsilon_2 , \varepsilon_3$ لاختبارتقارب الطريقة

(ب) إذا كان $g_j(\mathbf{x}_i) < 0 \qquad , j = 1, 2, ..., m$

(أي أن $\mathbf{X}_i$ نقطة داخل منطقة الحلول المقبولة)

ضع اتجاه البحث بحيث يكون :

$$S_i(\mathbf{x}) = -\ f(\mathbf{x}_i) \tag{٦,٧٣}$$

نطبع $\mathbf{S}_i$ (normalize) إلي نمط مناسب ثم تنفـذ خطوة (هـ) ، أمـا إذا كـان واحد على الأقل من الشروط $g_j(\mathbf{x_i}) = 0$ نفذ الخطوة (جـ) .

(جـ) أوجد إتجاها مقبولا صالحا s وذلك بحل مسألة إيجاد الإتجاه الآتية :

$$\text{minimize } -d \tag{٦,٧٤}$$

تحت القيود :

$$\mathbf{s}^T\, \nabla g_j(\mathbf{x}_i) + \theta_j d \le 0 \qquad j=1,\ 2,\dots,\ p$$

$$\mathbf{s}^T\, \nabla f + d \le 0 \tag{٦,٧٥}$$

$$-1 \le s_i \le 1 \quad , \quad i = 1,2,\dots, n \tag{٦,٧٦}$$

حيث s_i هي المركبة رقم i من المتجه s . وقد افترض أن الشروط الأولى التي عددها p فعالة وجميع قيم θ_j يمكن أخذها على أنها الوحدة و d تعتبر متغير تصميم إضافيا .

(د) إذا كانت قيمة d^* التي تم الحصول عليها في الخطوة (جـ) قريبة من الصفر أي أن $d^* < \varepsilon_1$

في هذه الحالة نوقف الحسابات ونأخذ :

$$\mathbf{x}_{opt} \simeq \mathbf{x}_i$$

وإذا كانت $d^* > \varepsilon_1$ نفذ الخطوة (٧) وذلك بأخذ : $\quad \mathbf{s_i} = \mathbf{s}$

(هـ) أوجـد طول خطوة مناسبـة λ_i في الإتجـاه $\mathbf{S}_i$ ثم احـصل على نقطة جـديدة $\mathbf{x}_{i+1}$ من المعادلة :

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \lambda_i \mathbf{S}_i$$

(و) احسب دالة الهدف $f(\mathbf{x}_{i+1})$

(ز) اختبر تقارب الطريقة فإذا كان :

$$\left| \frac{f(\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x}_{i+1})}{f(\mathbf{x}_i)} \right| \le \varepsilon_2$$

و

$$\| x_i - x_{i+1} \| < \varepsilon_3$$

أوقف التكرار بأخذ :

$$\mathbf{x}_{opt} = \mathbf{x}_{i+1}$$

إن لم يتحقق شرط التقارب نفذ الخطوة (ح)

(ح) ضع رقم تكرار جديد ليكون $i = i+1$ ثم كرر الخطوة (ب)

وبتطبيق هذه الخوارزمية سوف ندرس العديد من النقط وهي :

(أ) إيجاد اتجاه مقبول صالح ومناسب

إذا كانت النقطة $\mathbf{X}_i$ تقع داخل منطقة الحل أي أن :

$$g_j(\mathbf{x}_i) < 0 \quad , \quad j = 1, 2, ..., m$$

فإن الإتجاه الصالح المقبول يؤخذ كما يلي :

$$\mathbf{s}_i = -\nabla f(x_i) \qquad (٦,٧٨)$$

وتكون المسألة معقدة إذا كان أحد القيود أو أكثر محققا عند النقطة $\mathbf{x}_i$ ، أي عندما تكون :

$$g_j(\mathbf{x}_i) = 0$$

ولإيجاد الاتجاه في مثل هذه الحالة نقوم بحل المسألة الآتية :

إذا أعطيت النقطة $\mathbf{X}_i$ ، أوجد المتجه $\mathbf{s}$ والمقدار القياسي الذي يكبر d تحت القيود الآتية :

$$\mathbf{s}^T \nabla g_j(\mathbf{x}_i) + \theta_j d \le 0 \quad , j \in J \qquad (٦,٧٩)$$

$$\mathbf{s}^T \nabla f(\mathbf{x}_i) + d \le 0 \qquad (٦,٨٠)$$

حيث تمثل J فئة القيود الفعالة و s تطبع (normalized) بإحدى العلاقات الآتية:

$$\mathbf{s}^t\mathbf{s} = \sum_{i=1}^{n} s_i^2 = 1 \tag{٦,٨١}$$

$$-1 \le \mathbf{s}_i \le 1 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{٦,٨٢}$$

$$\mathbf{s}^T \nabla f(\mathbf{x}_i) \le 1 \tag{٦,٨٣}$$

في هذه المسألة θ_j مقدار إختياري موجب وللتبسيط نأخذ $\theta_j = 1$. أي حل لهذه المسألة له $d > 0$ هو إتجاه مقبول صالح. تعطي قيمة d العظمى أحسن إتجاه (S) والذي يجعل قيمة $\mathbf{s}^T \nabla g_j(\mathbf{x}_i)$ سالبة والقيمة $\mathbf{s}^T \nabla f(\mathbf{x}_i)$ سالبة بقدر المستطاع ونستخدم المعادلات من (٦,٨٣) إلى (٦,٨٥) في تطبيع المتجه (s) وذلك للتأكد من أن قيمة d العظمى سوف تكون قيمة محددة.

يمكن عرض مسألة إيجاد الاتجاه بوضوح أكثر كما يلي:

Minimize (-d)

تحت الشروط الآتية:

$$
\begin{aligned}
& s_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + s_2 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \ldots + s_n \frac{\partial g_1}{\partial x_n} + \theta_1 d \le 0 \\
& s_1 \frac{\partial g_2}{\partial x_1} + s_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \ldots + s_n \frac{\partial g_2}{\partial x_n} + \theta_2 d \le 0 \\
& \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
& s_1 \frac{\partial g_p}{\partial x_1} + s_2 \frac{\partial g_p}{\partial x_2} + \ldots + s_n \frac{\partial g_p}{\partial x_n} + \theta_p d \le 0 \\
& s_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + s_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + s_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + d \le 0 \\
& \mathbf{s}_1 - 1 \le 0
\end{aligned}
\tag{٦,٨٤}
$$

$$s_2 - 1 \leq 0$$

$$\vdots$$

$$s_n - 1 \leq 0$$

$$-1 - s_1 \leq 0$$

$$-1 - s_2 \leq 0$$

$$\vdots$$

$$-1 - s_n \leq 0$$

حيث p عدد الشروط الفعالة والمشتقات الجزئية :

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1}, \frac{\partial g_1}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial g_p}{\partial x_n}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

محسوبة عندالنقطة $\mathbf{x}_i$ ، حيث إن مركبات متجه البحث $S_i, i = 1,2,\ldots, n$ يمكن أن تأخذ قيما محصورة بين 1 ,1-. تعرف المتغيرات t_i لتكون :

$$t_i = s_i + 1 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

ولهذا السبب سوف تكون المتغيرات سالبة، يمكن كتابةالمشكلة المذكورة في صورة برنامج خطي قياسي كما يلي :

أوجد :

$$(t_1, t_2, \ldots, t_n, d, y_1, y_2, \ldots, y_{p+n+1})$$

والتي تصغر القيمة (d-) تحت القيود الآتية :

$$t_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + t_2 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \ldots + t_n \frac{\partial g_1}{\partial x_n} + \theta_1 d + y_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_1}{\partial x_i}$$

$$t_1\frac{\partial g_2}{\partial x_1}+t_2\frac{\partial g_2}{\partial x_2}+\dots+t_n\frac{\partial g_2}{\partial x_n}+\theta_2 d+y_2=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_2}{\partial x_i} \quad (٦,٨٥)$$

$$\vdots$$

$$t_1\frac{\partial g_p}{\partial x_1}+t_2\frac{\partial g_p}{\partial x_2}+\dots+t_n\frac{\partial g_p}{\partial x_n}+\theta_p d+y_p=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_p}{\partial x_i}$$

$$t_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+t_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\dots+t_n\frac{\partial f}{\partial x_n}+\quad d+y_{p+1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$t_1+y_{p+2}=2$$

$$t_2+y_{p+3}=2$$

$$\vdots$$

$$t_n+y_{p+n+1}=2$$

$$t_1\ge 0\,,\,t_2\ge 0\,,\dots,\,t_n\ge 0\,,\,d\ge 0$$

حيث $y_1 , y_2 ,\dots, y_{p+n+1}$ متغيرات متممة (أو مرنة)، ويمكن استخدام طريقة السمبلكس التي نوقشت في الفصل الثاني لحل مسألة إيجاد الاتجاه (٦,٨٥) فإذا أعطي حل هذه المسألة $d^* > 0$ عند ذلك يمكن تحسين $f(\mathbf{x})$ بالتحرك في اتجاه الحل المقبول الصالح.

$$\mathbf{s}=\begin{bmatrix} s_1\\ s_2\\ \vdots\\ s_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t_1^*-1\\ t_2^*-1\\ \vdots\\ t_n^*-1\end{bmatrix}$$

وإذا كانت $d^* > 0$ ، فيمكن توضيح أن شروط كون-توكر محققة عند النقطة $\mathbf{x}_i$ ، ولذا تكون النقطة $\mathbf{x}_i$ نقطة مثلي عند الحل الأمثل .

(ب) تعيين طول الخطوة

بعد إيجاد الاتجاه $\mathbf{s}_i$ عند أي نقطة $\mathbf{x}_i$ نحتاج لتعيين طول خطوة مناسبة λ_i لكي نحصل على النقطةالتالية $\mathbf{x}_{i+1}$ كما يلي :

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \lambda_i \mathbf{s}_i \qquad (٦,٨٦)$$

توجد طرق عديدة لحساب طول الخطوة الأمثل . أحد هذه الطرق هو تعيين طول الخطوة الأمثل الذي يصغر الدالة $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i + \lambda \mathbf{s}_i)$ بحيث إن النقطة الجديدة المعطاة بالمعادلة (٦,٨٦) تقع في منطقة الحلول المقبولة ، وتوجد طريقة أخرى لاختيار طول الخطوة λ_i وذلك بالمحاولة والخطأ بحيث تحقق العلاقات :

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}_i + \lambda_i \mathbf{s}_i) \le f(\mathbf{x}_i) \\ f(\mathbf{x}_i + \lambda_i \mathbf{s}_i) \le 0 \qquad j=1,2,\ldots,m \end{cases} \qquad (٦,٨٧)$$

الطريقة الأولى

طول الخطوة الأمثل λ_i يمكن إيجاده باستخدام إحدى الطرق التي تصغر الدالة ذات المتغير الواحد التي نوقشت في الفصل الثالث . ولكن المشكلة الوحيدة في استخدام هذه الطرق أن الشروط لا تؤخذ في الاعتبار أثناء إيجاد λ_i ، ولذلك فإن النقطة الجديدة $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \lambda_i \mathbf{s}_i$ ربما تقع في منطقة الحلول المقبولة أو على حدودها أو خارج منطقة الحلول المقبولة .

إذا وقعت النقطة $\mathbf{X}_{i+1}$ داخل منطقة الحلول المقبولة فهذا يعني أنه لا يوجد قيد فعال وبالتالي ننتقل الى الخطوة التالية بأخذ الاتجاه :

$$\mathbf{s}_{i+1} = -\nabla f(\mathbf{x}_{i+1})$$

(أي أثناء تنفيذ خطوة (ب) في الخوارزمية) ومن ناحية أخرى إذا وقعت النقطة $\mathbf{X}_{i+1}$ على حدود منطقة الحلول المقبولة فإننا نولد اتجاها جديدا صالحا ومناسبا $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{i+1}$ وذلك بحل جديد لمسألة إيجاد الاتجاه الصالح و المناسب (أي أننا ننفذ خطوة (جـ) من الخوارزمية).

إحدى الصعوبات العملية التي لوحظت في هذه المرحلة أنه لكي تستكشف أن النقطة $\mathbf{X}_{i+1}$ تقع على أحد القيود فإنه يجب معرفة ما إذا كان واحد أو أكثر من القيود تساوي الصفر، وحيث إن الحسابات عددية، فإننا نقول إن القيد g_i قيد فعال إذا كان:

$$\mathbf{g}_j(\mathbf{x}_{i+1}) = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-8}$$

وهكذا. وبالتالي يجب تحديد قيمة صغيرة موجبة ε تحدد لاكتشاف القيد الفعال. لهذا سوف تعتبر النقطة x واقعة على قيد حدي إذا حققت:

$$\left|g_j(x)\right| \le \varepsilon$$

حيث ε عدد صغير محدد مسبقا.

إذا وقعت النقطة $\mathbf{X}_{i+1}$ خارج منطقة الحلول المقبولة، فإن طول الخطوة يصحح بحيث تقع النقطة الناتجة في منطقة الحلول المقبولة. أحد أبسط الطرق لتصحيح طول الخطوة تتم بالاستكمال الخطي لقيم القيد المنتهك؛ فإذا افترضنا أن القيد الرائي قد انتهك عند λ_i فاعتبر الآتي:

محقق $$g_r' = g_r|_{\lambda=0} = g_r(\mathbf{x}_i) < 0 \qquad (٦,٨٨)$$

غير محقق $$g_r'' = g_r|_{\lambda=\lambda_i} = g_r(\mathbf{x}_i + \lambda_i \mathbf{s}_i) > 0 \qquad (٦,٨٩)$$

وبإفتراض تغيير خطي من $\mathbf{g}_r$ مع λ نحصل على:

$$g_r(\lambda) = a_1 + a_2\lambda \qquad (٦,٩٠)$$

تعطي المعادلتان(٦,٨٨) و (٦,٨٩) أن:

$$a_1 = g_r' \text{ و } a_2 = \frac{g_r'' - g_r'}{\lambda_i}$$

والقيـمة المقربة لطول الخطوة λ هي λ، التي تجعل النقطة $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \lambda\, \mathbf{s}_i$ تقع على القيد الحدي أي أنها تحقق المعادلة :

$$g_r(\mathbf{x}) = 0$$

يمكن الحصول عليها بوضع المعادلة (٦,٩٠) تساوي صفرا :

$$\lambda = -\frac{a_1}{a_2} = -\left(\frac{g_r'}{g_r'' - g_r'}\right) \lambda_i \qquad (٦,٩١)$$

أي أن الذي قـمنا بعـمله أنه عندمـا يكون القـيـد رقـم r منتـهكا (أي غـيـر مـحـقق) فـإننا نحصل على قيـمة مقربة يكون عندها القيد مـحققـاً. أما إذا كان هناك أكثر من قيد منتهك عند الخطوة المثلى λ_i فإننا نأخذ القيد الأسوأ على أنه القيد الرائي في اشتقاق المعادلة (٦,٩١) ومع أن هذه الطريقة تعتبر جيدة في تصحيح طول الخطوة، إلا أن لها بعض العيوب.

من الجـدير بالملاحظة أن طول الخطوة التـجـريبي ε_1 يجب أن يحـدد ويؤخـذ على أنه طول خطوة مبدئي عند استخدام إحدى طرق التصغير ذات المتغير الواحد.

الطريقة الثانية

إذا لم يكن المطلوب هو تحديد طول الخطوة الأمثل λ_i ، فإننا نجـري نوعـا من المحاولة والخطأ لإيجاد طول الخطوة λ_i التي تحقق العلاقة (٦,٨٧).

إحدى الطرق الممكنة هو اختيار طول خطوة $\in$ ثم نحسب القيم :

$$\bar{g}_j = g_j(\mathbf{x}_i + \varepsilon\, \mathbf{s}_i) \text{ و } \bar{f} = f(\mathbf{x}_i + \varepsilon\, \mathbf{s}_i)$$

ونتوقع النتائج التالية :

(أ) $\bar{f} \le f$ و $\bar{g}_j < 0$ لكل قيم $j = 1, 2, \ldots, m$

(ب) $\bar{f} \le f$ و $\bar{g}_j \le 0$ لكل قيم $j = 1, 2, \ldots, m$

(جـ) $\bar{f} \le f$ و $\bar{g}_j > 0$ لبعض قيم j

(د) $\bar{f} > f$ و $\bar{g}_j < 0$ لكل قيم $j = 1, 2, \ldots, m$

(هـ) $\bar{f} > f$ و $\bar{g}_j \le 0$ لكل قيم $j = 1, 2, \ldots, m$

(و) $\bar{f} > f$ و $\bar{g}_j > 0$ لبعض قيم j

فإذا كانت النتيجة هي (أ) أو (ب) فإن طول الخطوة المطلوب هو λ_i

أما في الحالات (جـ) إلى (و) فإن قيمة ε تنقص، ونكرر الحسابات حتى نحصل على الحالة (أ) أو (ب). فإذا تحقق هذا فإن تقريب جديدا للنقطة المثلى يكون: $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \lambda \mathbf{s}_i$. إذا وقعت النقطة $\mathbf{X}_{i+1}$ داخل منطقة الحلول المقبولة، فإنه يمكن أخذ خطوة أخرى في اتجاه $\mathbf{S}_i$ أو أخذ الخطوة في اتجاه $-\nabla f(\mathbf{x}_{i+1})$ حيث إنه لا يوجد أي قيد فعال عند هذه النقطة.

مثال (٦,٥)

صغر الدالة:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 + 8$$

تحت الشرط:

$$g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2 - 4 \le 0$$

مستخدماً نقطة مبدئية $(x_1, x_2) = (0, 0)$ مع أخذ:

$$\varepsilon_1 = .001 \ , \ \varepsilon_2 = .001 \ , \ \varepsilon_3 = .01$$

الحل

(أ) عند $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$ ، $f(\mathbf{x}_1) = 8$ ، $g_1(\mathbf{x}_1) = -4$

التكرار الأول

(ب) حيث $g_1(\mathbf{x}_1) \leq 0$ نأخذ مجال البحث :

$$s_1 = -\nabla f(\mathbf{x}_1) = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

وهذا ممكن تطبيعه للحصول على $\mathbf{s}_1 = \{1, 1\}$

(جـ) لإيجاد النقطة الجديدة $\mathbf{X}_2$ ، يجب علينا إيجاد طول خطوة مناسبة في الاتجاه s_1 لهذا اخترنا تصغير $f(\mathbf{x}_1 + \lambda s_1)$ بالنسبة الى λ هنـا :

$$f(\mathbf{x}_1 + \lambda s_1) = f(0 + \lambda, 0 + \lambda) = 2\lambda^2 - 8\lambda + 8$$

عند $\lambda = 2$ فإن $\dfrac{df}{d\lambda} = 0$

لهـذا فإن النقطة الجـديدة معطاة $\mathbf{x}_2 = (2,2)$ و $g_1(\mathbf{x}_2) = 2$ وحـيث أن الشـرط منتهك (غير محقق) فإن طول الخطوة يجب تصحيحه وبما أن :

$$g_1'' = g_1 |_{\lambda=2} = 2, \; g_1' = g_1 |_{\lambda=0} = -4$$

من المعادلة (٦,٩١) طول الخطوة الجديد :

$$\lambda = -\left(\frac{g_1'}{g_1'' - g_1'}\right) \lambda = \frac{4}{3}$$

وهذا يعطي $g_1 |_{\lambda=\lambda} = 0$ وبالتالي فإن $\mathbf{x}_2 = \left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$

(هـ) $f(\mathbf{x}_2) = \dfrac{8}{9}$

(و) هنا $\left|\dfrac{f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)}{f(\mathbf{x}_1)}\right| = \left|\dfrac{8 - \frac{8}{9}}{8}\right| = \dfrac{8}{9} > \varepsilon_2$

و $$\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| = \left[(0 - \frac{4}{3})^2 + (0 - \frac{4}{3})^2\right]^{1/2} = 1.887 > \varepsilon_2$$

وبالتالي فإن معايير التقارب لم تتحقق.

التكرار الثاني

(ب) حيث $g_1 = 0$ عند X_2 لذا يجب إيجاد إتجاه صالح مناسب

(جـ) يمكن عرض مسألة إيجاد الاتجاه كما في المعادلات (٦,٨٥)

صغر الدالة:

$$f = -d$$

تحت القيود الآتية:

$$t_1 + 2t_2 + d + y_1 = 3$$
$$-\frac{4}{3}t_1 - \frac{4}{3}t_2 + d + y_2 = -\frac{8}{3}$$
$$t_1 + y_3 = 2$$
$$t_2 + y_4 = 2$$
$$t_1 \geq 0$$
$$t_2 \geq 0$$
$$d \geq 0$$

حيث y_1, y_2, y_3, y_4 متغيرات متممة غير سالبة وحيث إن الحلول الأساسية الممكنة غير معروفة، فإننا ندخل متغيرا اصطناعيا (artificial) $y_5 \geq 0$ إلى القيد الثاني بإضافة الصيغة غير الممكنة $w = y_5$ يمكن حل مسألة البرمجة الخطية كما هو موضح في الجدول (٦,١).

الجدول رقم (١ , ٦).

متغيرات أساسية	معاملات كل من t_1	t_2	d	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$-f$	$-w$	$\bar{b}_i$	أصغر $(\bar{b}_i/\bar{a}_{is})$ للقيمة و $\bar{a}_{is}>0$
y_1	1	2	1	1	0	0	0	0	0	0	3	3
y_5	4	4	-3	0	-3	0	0	1	0	0	8	2 ←
y_3	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	2
y_4	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	2	
$-f$	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	
$-w$	-4 ↑	-4	3	0	3	0	0	0	0	1	-8	

المعامل الأكثر سالبية

نلاحظ هنا أن معامل t_1 أكثر سالبية وبالتالي يدخل الأساس

y_1	0	1	7/4	1	3/4	0	0	-1/4	0	0	1	7/4
t_1	1	1	-3/4	0	-3/4	0	0	1/4	0	0	2	
y_3	0	-1	3/4	0	3/4	1	0	-1/4	0	0	0	0 ←
y_4	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	2	
$-f$	0	0	-1	0	0	0	0	0		1	0	0
$-w$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	
y_1	0	10/3	0	1	-1	-7/3	0	1/3	0	0	1	3/10 ←
t_1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	
d	0	-4/3	1	0	1	4/3	0	-1/3	0	0	0	
y_4	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	2	2
$-f$	0	-4/3	0	0	1	4/3	0	-1/3	1	0	0	
t_2	0	1	0	3/10	-3/10	-7/10	0		0	0	3/10	
t_1	1	0	0	0	0	1	0		0	0	2	
d	0	0	1	4/10	6/10	4/10	0		0	0	4/10	
y_4	0	0	0	-3/10	3/10	7/10	1		0	0	17/10	
$-f$	0	0	0	4/10	6/10	4/10	0		1	0	4/10	

حيث إن كل المعاملات موجبة، فإن الحل الحالي حل أمثل. الحل المعطى كالآتي:

$$t_1^* = 2,\ t_2^* = \frac{3}{10},\ d^* = \frac{4}{10},\ y_4^* = \frac{17}{10},\ y_1^* = y_2^* = y_3^* = 0$$

وتكون القيمة الصغرى للدالة f هي:

$$f = -d^* = -\frac{4}{10}$$

وحيث إن $d^* > 0$ فإن الإتجاه المطلوب هو:

$$S = \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_1^*-1 \\ t_2^*-1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ -0.7 \end{Bmatrix}$$

(د) حيث أن $d^* > \varepsilon_1$ ننفذ الخطوة التالية:

(هـ) نتحرك من النقطة (1.333 , 1.333) في الاتجاه $\mathbf{S} = (1,-0.7)$

ولإيجاد طول الخطوة الذي يصغر الدالة، نصغر:

$$f(x_2+\lambda\, \mathbf{S}_2) = \mathbf{f}\,(1.333 + \lambda\ ,\ 1.333-0.7\,\lambda)$$

$$= 1.49\lambda^2 - 0.4\lambda + 0.889$$

$$\frac{df}{d\lambda} = 2.98\lambda - 0.4 = 0$$

أي أن:

$$\lambda = 0.134$$

النقطة الجديدة هي:

$$\dot{\mathbf{x}}_3 = \mathbf{x}_2 + \lambda\, s_2 = \begin{Bmatrix} 1.333 \\ 1.333 \end{Bmatrix} + 0.134 \begin{Bmatrix} 1.0 \\ -0.7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.467 \\ 1.239 \end{Bmatrix}$$

عند هذه النقطة القيد محقق حيث $g_1(\mathbf{x}_3) = -0.055$ وحيث إن النقطة $\mathbf{X}_3$ تقع في نطاق منطقة الحلول الممكنة فإننا ننفذ الخطوة (ب) تستمر هذه التكرارات حتى

نحصل على الحل الأمثل عند النقطة $x^* = (1.6, 1.2)$ وتكون القيمة الصغري للدالة هي:

$$f = 0.8$$

(٦,٣,٢) طريقة المستوى القاطع

تستخدم طريقة المستوى القاطع (cutting plane method) لحل مسائل البرمجة غير الخطية المحدبة، وفيها تقرب القيود غير الخطية إلى قيود خطية باستخدام مفكوك تايلور. عندما تكون دالة الهدف دالة خطية، فانه يمكن حل مسألة البرمجة الخطية(المقربة)باستخدام طريقة السمبلكس. لاحظ أنه إذا كان الحل الذي حصلنا عليه في حدود الدقة المطلوبة فإننا نعتبره حلاً أمثل. وإذا لم يكن كذلك نبدأ من هذا الحل ونحصل على تقريب جديد باستخدام مفكوك تايلور حول هذا الحل ونعيد حل المسألة المطلوبة باستخدام طريقة السمبلكس ونكرر ذلك حتى نحصل على الدقة المطلوبة.

تحويل المسألة

يجب أن تكون دالة الهدف خطيةحتى يمكن استخدام طريقة المستوى القاطع، فإذا كانت مسألة الامثلية تحتوي علي دالة هدف غير خطية، فإن الأمر يستلزم تحويلها إلى دالة خطية كما يلي:

لنفرض أن المسألة المعطاه هي:

تصغير الدالة $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

تحت القيود:

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \le 0 \quad , j=1,2,\dots,m \qquad (٦,٩٢)$$

بإدخال متغير جديد؛ وليكن x_{n+1}، وتحويل المسألة إلى المسألة المكافئة بالصيغة

صغر: x_{n+1}

تحت القيود:

$$g_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \le 0 \quad , j = 1, 2, \ldots, m \qquad (٦,٩٣)$$

والشرط:

$$g_{m+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - x_{n+1} \le 0$$

وهكذا بإضافة متغير إضافي وشرط إضافي تحولت المسألة الأصلية (٦,٩٢) التي لها دالة هدف غير خطية، إلى مسألة ذات دالة هدف خطية.

لنفرض أننا نرغب في تصغير:

$$f(\mathbf{x}) = c^T x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \qquad (٦,٩٤)$$

تحت الشروط:

$$g_j(\mathbf{x}) \le 0 \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

الخوارزمية

يمكن تنفيذ خوارزمية قطع المستوى بالخطوات التالية:

خطوة ١

نضع عداد التكرارات $i = 1$ ونبدأ بنقطة مبدئية $\mathbf{x}_1$ مع ملاحظة ان النقطة $\mathbf{x}_1$ قد لاتحقق القيود

خطوة ٢

باستخدام مفكوك تايلور حول النقطة $\mathbf{x}_1$ نقرب دوال القيود $g_j(\mathbf{x})$ إلى دوال خطية

$$g_j(\mathbf{x}) = g_j(\mathbf{x}_1) + \nabla g_j(\mathbf{x}_1)^T (x - \mathbf{x}_1)\ ,\ j = 1, 2,..., m \tag{٦,٩٥}$$

خطوة ٣

نضع صيغة جديدة لمسألة البرمجة الخطية المقربة وهي :

صغر الدالة : $C^T\mathbf{x}$

تحت القيود :

$$g_j(\mathbf{x}_j) + \nabla g_j(\mathbf{x}_j)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \leq 0\ ,\ j = 1, 2,...\ , m \tag{٦,٩٦}$$

خطوة ٤

نحل مسألة البرمجة الخطية لكي نحصل على متجه الحل $\mathbf{x}_{i+1}$

خطوة ٥

نحسب قيم الطرف الأيسر للقيود الأصلية عند النقطة $\mathbf{x}_{i+1}$ ، أي نحسب قيم :

$$g_j(\mathbf{x}_{i+1}) \leq 0\ ,\ j = 1,2,...\ ,m$$

عندما تكون :

$$g_j(\mathbf{x}_{i+1}) \leq \varepsilon\quad ,\ j= 1,2,...,m$$

حيث ε مقدار صغير موجب يمثل درجة الدقة مع العلم ان جميع القيود الأصلية محققة . اخيرا نتوقف ونأخذ :

$$\mathbf{x}_{opt} = \mathbf{x}_{i+1} \tag{٦,٩٧}$$

أما إذا كانت :

$$g_j(\mathbf{x}_{i+1}) \geq \varepsilon$$

لأي من قيم j نحدد الشرط أو القيد ($g_k(\mathbf{x}_{i+1}$ الذي يحقق :

$$g_k(\mathbf{x}_{i+1}) = \max_j \left|g_j(\mathbf{x}_{i+1})\right|$$

ثم نقرب القيد $g_k(\mathbf{x}) \leq 0$ حول النقطة $\mathbf{x}_{i+1}$ باستخدام العلاقة

$$g_k(\mathbf{x}) \approx g_k(\mathbf{x}_{i+1}) + \nabla g_k(\mathbf{x}_{i+1})^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i+1}) \leq 0 \quad (٦, ٩٧)$$

وبإضافة هذا القيد إلى مسألة البرمجة الخطية السابقة ليكون لدينا الشرط رقم $m+1$.

خطوة ٦

نضع $i = i + 1$ والعدد الكلي للقيود في التقريب الجديد $m = m + 1$ ، ثم نعود إلى الخطوة رقم ٤ .

نلاحظ أنه ربما يكون للمسألة الخطية المذكورة في المعادلة (٦, ٩٦) حلا غير محـدد أحيانا ويمكن تحاشي ذلك بصياغة التقريب الأول مع الأخذ في الاعتبـار القيود التالية فقط:

$$l_i \leq x_i \leq u_i \quad (٦, ٩٨)$$

حيث تمثل l_i، u_i الحد الأدنى والحد الأعلى للمتغير x_i على الترتيب، وتعتمد قيم l_i، u_i علي المسألة المدروسة وقيمها ويجب ان نختار الحل الأمثل للمسألة الأصلية (٦, ٩٤) بحيث لا يتجاوز المدى المذكور بالمعادلات (٦, ٩٨).

التفسير الهندسي للطريقة

يمكن تفسير طريقة المستوي القاطع باستخدام المسألة الآتية ذات المتغير الواحد:

أوجد القيمة الكبرى

$$f(x) = c_1 x \quad (٦, ٩٩)$$

تحت القيود

$$g(x) \leq 0 \quad (٦, ١٠٠)$$

حيث c_1 ثابت، $g(x)$ دالة غير خطية في المتغير x .

اعتبر منطقة الحلول الممكنة وكفاف (contour) دالة الهدف كما هو موضح بالشكل (٦,٢) ولكي نتجنب الحل غير المحدود نأخذ الشروط علي x بحيث $c \leq x \leq d$ حيث d , c تمثل الحد الأدنى والأعلى للمتغير x. بإستخدام هذه الشروط نصيغ مسألة البرمجة الخطية كالآتي :

أوجد القيمة الكبرى للدالة

$$f(x) = c_1\, x \qquad (٦,١٠١)$$

تحت الشروط

$$c \leq x \leq d$$

يلاحظ أن $x^* = c$ هو الحل الأمثل للمسألة الخطية، بعد ذلك نفك دالة الشرط $g(x)$ حول النقطة c لتحويلها إلي دالة خطية ثم نضيفها إلى فئة الشروط السابقة، وبالتالي تصبح مسألة البرمجة الخطية بالصياغة

أوجد القيمة الكبرى للدالة :

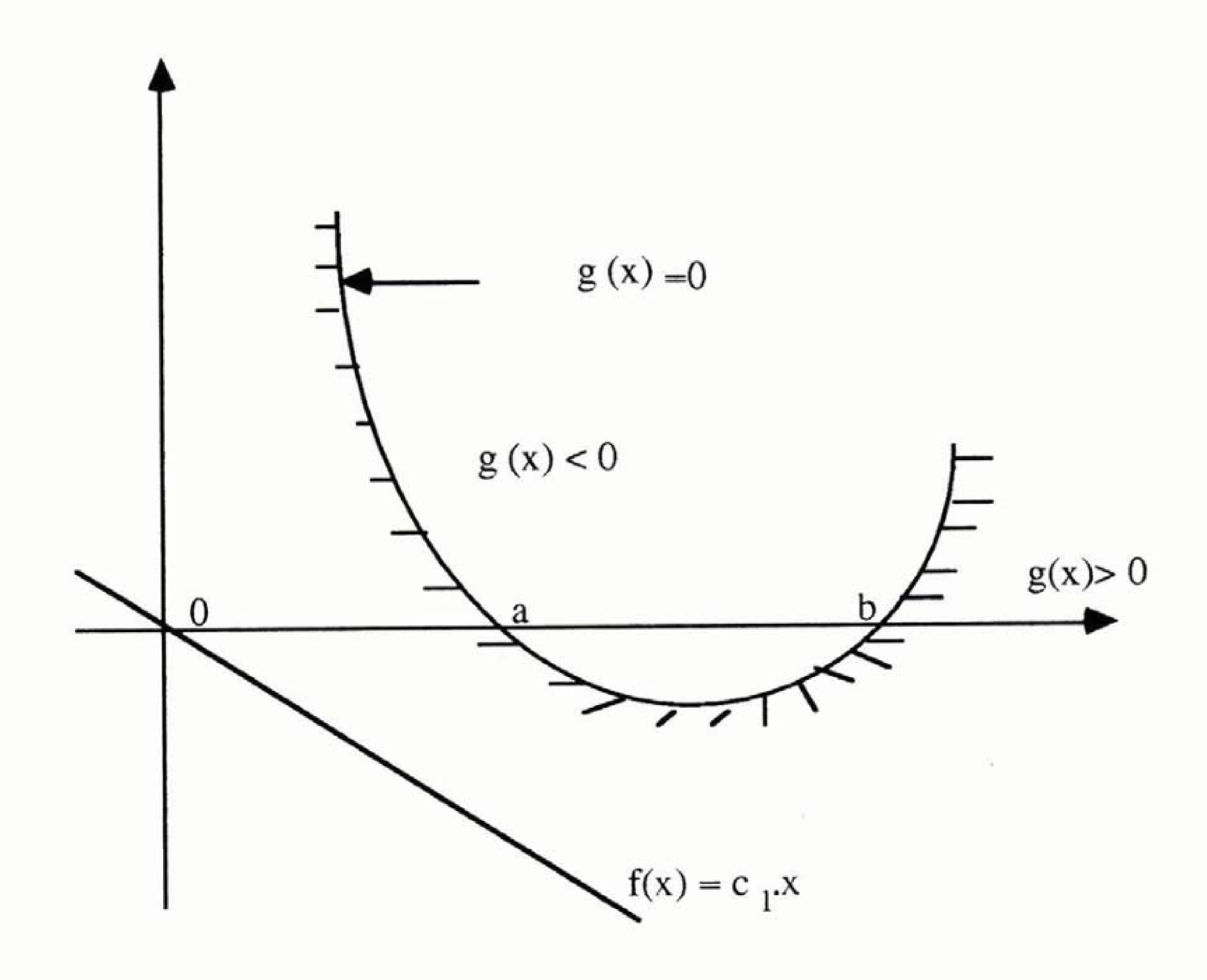
$$f(x) = c_1 x \qquad (\text{٦,١٠١أ})$$

تحت القيود :

$$c \leq x \leq d \qquad (\text{٦,١٠١ب})$$

$$g\,(c) + \frac{dg}{dx}(\mathbf{c}).(x-c) \leq 0 \qquad (\text{٦,١٠١جـ})$$

نحدد منطقة الحلول للمتغير x طبقا للشروط و(٦,١٠١أ) و (٦,١٠١ب) [انظر شكل (٦,٢)]، يمكن ملاحظة ان الحل الامثل لمسألة البرمجة الخطية المقربة بالمعادلات (٦,١٠١أ،ب،جـ) هو $x^* = e$. نقرب الشرط $g(x) \leq 0$ حول النقطة $x^* = e$ لتحويل معادلته غير الخطية إلى معادلة خطية، وبإضافة فئة الشروط السابقة إليه نحصل على المسألة التالية للبرمجة الخطية المقربة كما يلي :



الشكل رقم (٦,٢). التمثيل البياني للمسألة المذكورة بالمعادلتين (٦,٩٩) و(٦,١٠٠)

أوجد القيمة الكبرى للدالة:

$$f(x) = c_1 x \quad (٦,١٠٢أ)$$

تحت القيود:

$$c \leq x \leq d \quad (٦,١٠٢ب)$$

$$g(c) + \frac{dg}{dx}(c).(x-c) \leq 0 \quad (٦,١٠٢ج)$$

$$g(e) + \frac{dg}{dx}(e).(x-e) \leq 0 \quad (٦,١٠٢د)$$

نقرب القيد إلى معادلة خطية حول النقطة $x = c$

يمكن ملاحظـــة المدي المسموح به للمتغـــير x طبقا للشروط (٦أ ,١٠١) و (٦ب ,١٠١) و (٦جـ ,١٠١) و (٦د ,١٠١) نقرب الشرط $g(x) \leq 0$ حول النقطة $x^* = f$ ثم نضيف فئة الشروط السابقة (٦ ,١٠٢) لنحصل على تقريب جديد لمسألة البرمجة الخطية.

نستمر في تنفيذ هذه الإجراءات حتى نحصل على الحل الأمثل بدرجة الدقة المطلوبة. ومن الشكل (٦ ,٣) والشكل (٦ ,٤) يمكن ملاحظة أن الحلول المثلى لجميع مسائل البرمجة الخطية المقربة (مثل النقط .....c,e,f) تقع خـارج منطقة الحلول الممكنة وتتقارب في اتجـاه الحـل الأمثـل الحقيقي $x=a$ [وهذا محقق حتى لو كانت المسألة متعددة المتغيرات].

من المفترض الاستمرار في إجراء هذه العمليات حتى نحصل على حل للمسألة المقربة للقيود الأصلية ليحقق درجة دقة معينة، أي أن

$$g\left(x_k^*\right) \leq \varepsilon$$

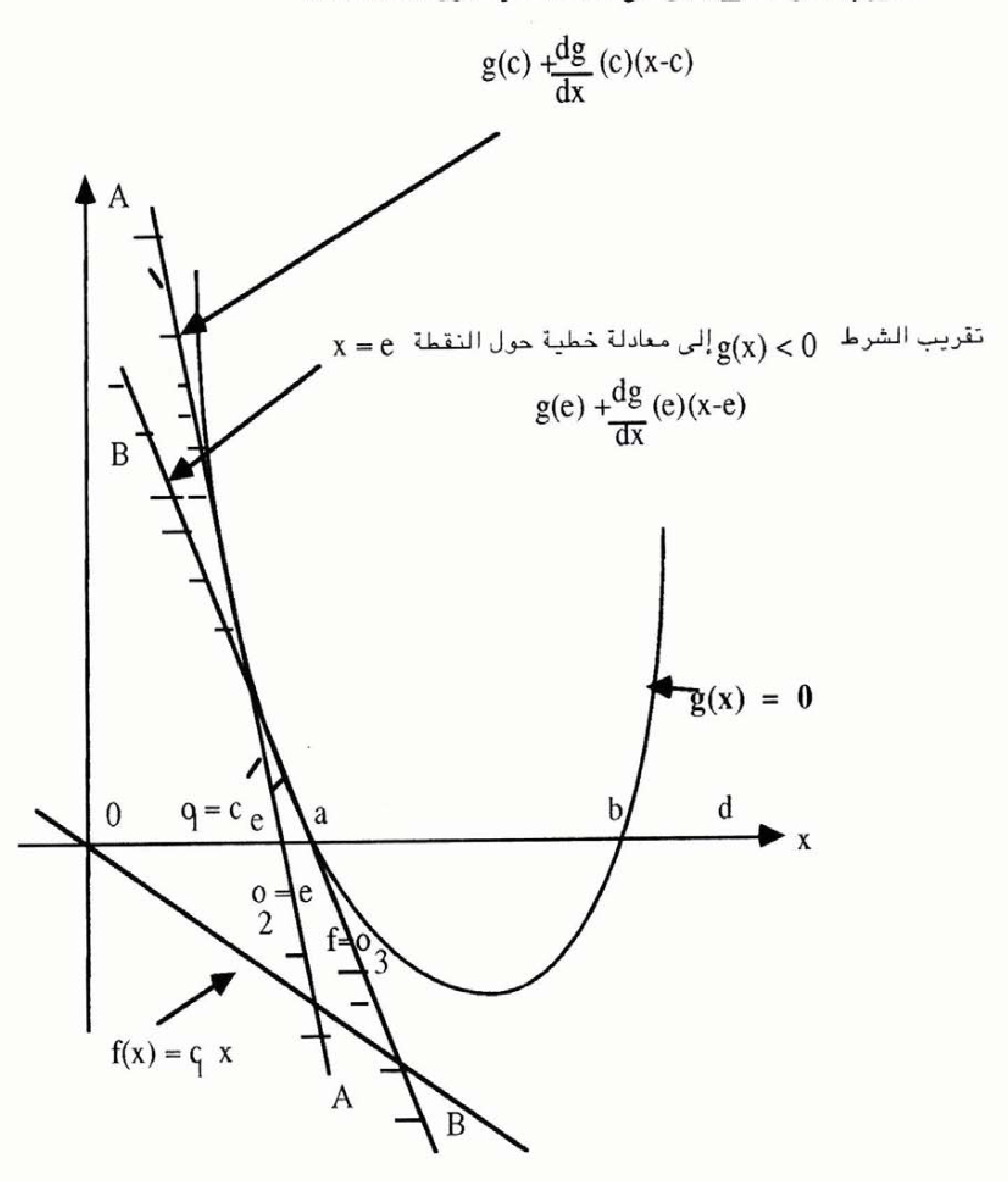
حيث ε كمية صغيرة موجبة و x_k^* هو الحل الأمثل للتقريب k لمسألة البرمجة الخطية.

يلاحظ أن الخطوط المعرفة بالمعادلة :

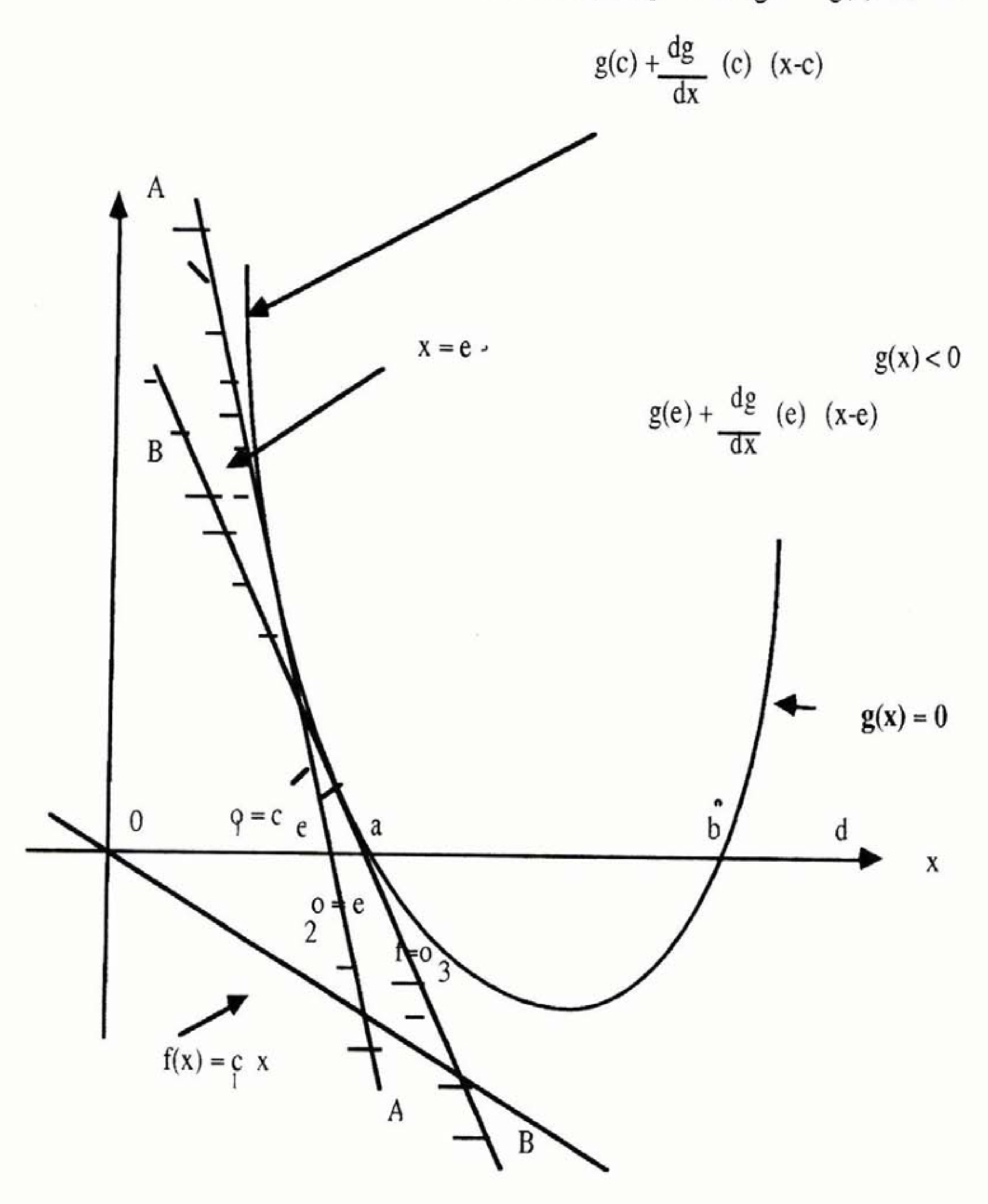
لجميع قيم k

$$g\left(x_k^*\right) + \frac{dg}{dx}\left(x_k^*\right)\left(x - x^*\right)$$

تقطع جزء من منطقة الحلول الممكنة، ولهذا سميت هذه الطريقة بطريقة المستوى القاطع.



الشكل رقم (٦,٣). تقريب الشرط إلى معادلة خطية حول x = c .



الشكل رقم (٤,٦). تقريب الشرط إلى معادلة خطية حول x= c.

مثال (٦,٦)

صغر الدالة:

$$f(x_1,x_2) = x_1 - x_2$$

تحت القيود:

$$g(x_1,x_2) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 10 \le 0$$

باستخدام طريقة المستوى القاطع. وبدرجة دقة $\varepsilon = 0.02$ لاحظ ان القيد المطلوب يمثِّل بقطع ناقص، وبالتالي فإن المسألةالمعطاة هي مسألة برمجة محدبة. يتضح من تمثيلها البياني أن الحل الأمثل هو $(x_1^*, x_2^*) = (0,1)$ وعندها يكون:

$$f_{min} = -1$$

الحل

باتباع الخطوات ١، ٢، ٣ نبدأ بأي حل يتحاشى إمكانية أن يكون الحل الناتج غير محدود وليكن ذلك اختيار:

$$-2 \le x_2 \le 2 \quad , \quad -2 \le x_1 \le 2$$

ثم نحل مسألة البرمجة الخطيةالآتية:

أوجد القيمة الصغري للدالة:

$$f(x_1,x_2) = x_1 - x_2$$

تحت القيود:

$$-2 \le x_1 \le 2$$

$$-2 \le x_2 \le 2 \qquad (٦,١٠٣)$$

يمكن الحصول علي حل هذه المسألة كما يلي:

$$\mathbf{x} = (-2,2) \quad , \quad f(x_1,x_2) = -4$$

خطوة ١

حيث إننا حصلنا على مسألة برمجة خطية واحدة فإنه يمكن أخذ:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_2 = \{-2,2\}$$

خطوة ٢

حيث إن :

$$g_1(\mathbf{x}_2) = 23 > \varepsilon$$

فإننا نقرب الشرط $g_1(\mathbf{x})$ حول النقطة $\mathbf{x}_2$ حيث إن :

$$g_1(\mathbf{x}) \approx g_1(\mathbf{x}_2) + \nabla g_1(\mathbf{x}_2)^T (x - \mathbf{x}_2) \le 0 \qquad (٦,١٠٤)$$

$$g_1(\mathbf{x}_2) = 23\ ,\ \left.\frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{x}_1}\right|_{\mathbf{x}_2} = (6x_1 - 2x_2)\big|_{\mathbf{x}_2} = -16$$

$$\left.\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right|_{x_2} = (-2x_1 + 2x_2)\big|_{x_2} = 8$$

عندئذ نصبح المعادلة (3.36) هي :

$$g_1(\mathbf{x}) = -16x_1 + 8x_2 - 25 \le 0$$

بإضافة هذا القيد إلى مسألة البرمجة الخطية السابقة فإن المسألة الجديدة تصبح

أوجد القيمة الصغرى :

$$f(x_1,x_2) = x_1 - x_2$$

تحت القيود :

$$\begin{cases} -2 \le x_1 \le 2 & (٦,١٠٥) \\ -2 \le x_2 \le 2 & (٦,١٠٥) \\ -16x_1 + 8x_2 - 25 \le 0 \end{cases}$$

خطوة ٣

ضع رقم التكرار $i = 2$ ثم انتقل إلى الخطوة ٤ .

خطوة ٤

بحل مسألة البرمجة الخطية المذكورة في المعادلة(٦,١٠٥) نحصل على الحل

$$\mathbf{x}_3 = [0.5625, 2.0] \quad \text{و} \quad f_3 = f(\mathbf{x}_3) = -2.5625$$

خطوة ٥

حيث إن $g_1(\mathbf{x}_3) = 6.1992 > \varepsilon$ فإننا نقرب $g_1(\mathbf{x})$ حول النقطة $\mathbf{x}_3$ كما يلي:

$$g_1(\mathbf{x}) \approx g_1(\mathbf{x}_3) + \nabla g_1(\mathbf{x}_3)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_3) \le 0 \qquad (٦,١٠٦)$$

$$g_1(x_3) = 6.19972 \ , \ \left.\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right|_{x_3} = -7.375 \ , \ \left.\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right|_{x_3} = 5.125$$

وتصبح المعادلة (٦,١٠٦) على الصيغة :

$$g_1(\mathbf{x}) = -7.375x_1 + 5.125x_2 - 8.19922 < 0$$

وهذا يعطينا مسألة البرمجة الخطية الجديدة

أوجد القيمة الصغرى للدالة :

$$f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$$

تحت القيود التالية :

$$\begin{cases} -2 \le x_1 \le 2 \\ -2 \le x_2 \le 2 \\ -16x_1 + 8x_2 - 25 < 0 \\ -7.375x_1 + 5.125x_2 - 8.19922 \le 0 \end{cases} \qquad (٦,١٠٧)$$

خطوة ٦

ضع $i = 3$ ثم انتقل إلى الخطوة ٧

خطوة ٧

حل مسألة البرمجة الخطية المقربة للمعادلة (٦,١٠٧) فنحصل على الحل

$$x_4 = (0.2787, 2.00) \quad , \quad f_4(x_4) = -1.72193$$

تستمر هذه الإجراءات حتى يتحقق شرط التقارب $g_1(\mathbf{x}_i) \leq \varepsilon$ في الخطوة ٥ .

(٦,٤) الطرق غير المباشرة

في معظم الطرق غير المباشرة (indirect methods) تحل المسألة المقيدة كمتتابعة من المسائل غير المقيدة، وسوف نناقش بعض هذه الطرق في هذا البند.

(٦,٤,١) تقنيات التحويل

لبعض مسائل الأمثلية المقيدة قيود ممثلة بدوال بسيطة في المتغيرات وفي مثل هذه الحالات فإنه من الممكن تبديل المتغيرات بحيث تتحقق القيود ذاتياً.

في الحالات الأخرى، من الممكن معرفة أي من القيود تكون فعالة (يلاحظ بأن المقصود بالشرط الفعال هو الشرط الذي يتحقق مع إشارة أو علامة التساوي) عند الحل الأمثل. في هذه الحالات يمكن استخدام معادلة القيد الخاصة $g_j(\mathbf{x})$ لكي نحذف بعض المتغيرات من المسألة، وسوف تعرض كل الحالات السابقة في طريقتين، وهما طريقة تبديل المتغيرات وطريقة حذف المتغيرات.

طريقة تبديل المتغيرات

إذا كانت الشروط $g_j(\mathbf{x})$ دوال واضحة (صريحة) في المتغيرات x_i ولها صيغ بسيطة، فيكون من المحتمل عمل تحويل للمتغيرات المعتمدة (غير المستقلة) بحيث تتحقق القيود ذاتيا. لذا فإنه من المحتمل تحويل مسألة الأمثلية المقيدة إلى

مسألة غير مقيدة بعمل تبديل للمتغيرات. وأحد أنواع القيود التي تصادفنا كثيراً ويمكن أن يتحقق بهذه الطريقة هي القيود التي تكون المتغيرات فيها محدودة من أسفل ومن أعلى بثوابت معينة أي أن يكون:

$$l_i \le x_i \le u_i \qquad (٦,١٠٨)$$

حيث l_i ، u_i هي الحد الأسفل والحد الأعلى على الترتيب التي تحد المتغير x_i تتحقق هذه القيود بتحويل المتغير x_i على الصورة:

$$x_i = l_i + (u_i - l_i)\sin^2 y_i \qquad (٦,١٠٩)$$

حيث y_i هو متغير جديد يمكن أن يأخذ أي قيمة .

في الحالة الخاصة وعندما يكون المتغير x_i في الفترة (0,1) يمكننا استخدام أي تحويلة من التحويلات الآتية:

$$\begin{cases} x_i = \sin^2 y_i \\ x_i = \cos^2 y_i \\ x_i = \dfrac{e^{y_i}}{(e^{y_i}+e^{-y_i})} \\ x_i = \dfrac{y_i^2}{(1+y_i^2)} \end{cases} \qquad (٦,١١٠)$$

ومن ناحية أخرى إذا كانت المتغيرات محددة وتأخذ قيماً تقع بين 1,1- فإنه يمكن اختيار أحد التحويلات

$$\begin{cases} x_i = \sin y_i \\ x_i = \cos y_i \\ x_i = \dfrac{2\,y_i}{1+y_i^2} \end{cases} \qquad (٦,١١١)$$

وبعد تطبيق هذه التحويلات فإن النهاية الصغرى غير المقيدة تعطى بدلالة المتغيرات الجديدة، ويجب ملاحظة النقاط التالية إذا أردنا استخدام طريقة التحويل:

١- يجب أن تكون الشروط $g_j(\mathbf{x})$ دوال بسيطة في $\mathbf{x}_i$.

٢- قد لا يكون من السهل إيجاد التحويلة الضرورية لبعض القيود.

٣- يفضل عدم استخدام التحويلة التي تستنفد كل القيود؛ لأن التحويل الجزئي قد ينتج دالة هدفا يكون إيجاد القيمة الصغرى لها أصعب مقارنة بإيجاد القيمة الصغرى للدالة الأصلية.

ولتوضيح هذه الطريقة نورد المثال التالي:

مثال (٦,٧)

أوجد أبعاد متوازي المستطيلات التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن بشرط ألا يزيد ارتفاعه على ٤٢ سم ولا يزيد مجموع محيط قاعدته وارتفاعه على ٧٢ سم.

الحل

نفرض أن x_1، x_2، x_3 تمثل الارتفاع والطول والعرض على الترتيب.

يمكن كتابة النموذج الرياضي للمسألة كما يلي:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \qquad (٦,١١٢)$$

تحت القيود:

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 72 \qquad (٦,١١٣)$$

$$x_1 \leq 42 \qquad (٦,١١٤)$$

$$x_1 \geq 0 \ ، \ x_2 \geq 0 \quad \text{and} \quad x_3 \geq 0 \qquad (٦,١١٥)$$

ندخل متغيرات جديدة y_1، y_2، y_3 كما يلي:

(٦,١١٦)

$$\begin{cases} x_1 = y_1 & \text{أي أن} \quad y_1 = x_1 \\ x_2 = y_2 & \text{أي أن} \quad y_2 = x_2 \end{cases}$$

(٦,١١٧)

$$x_3 = \frac{1}{2}(y_3 - y_1 - 2y_2) \quad \text{أي أن} \quad y_3 = x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

عندئذ يمكن التعبير عن القيود (٦,١١٣) - (٦,١١٥) كما يلي:

(٦,١١٨)

$$\begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 42 \\ 0 \leq y_2 \leq 36 \\ 0 \leq y_3 \leq 72 \end{cases}$$

حيث يمكن الحصول على الحد الأعلى للمتغير y_2 بوضع $x_1 = x_3 = 0$ في المعادلة (٦,١١٣)، حيث إن x_1، x_2 مقيدة لكونها موجبة، فمن البدهي أنه لا يمكن أن تناظر قيمة سالبة للمتغير x_3 (حجم سالب) قيمة عظمى للدالة f وبالتالي فيمكن التغاضي عن المعادلة (٦,١١٦) عند إجراء الحسابات وتتحقق مجموعة القيود (٦,١١٨) ذاتيا إذا عرفنا المتغيرات z_1، z_2، z_3 كما يلي:

$$\begin{cases} y_1 = 42 \sin^2 z_1 \\ y_2 = 36 \sin^2 z_2 \\ y_3 = 72 \sin^2 z_3 \end{cases} \tag{٦,١١٩}$$

فإذا استخدمنا المعادلات (٦,١١٧) و (٦,١١٩) فإنه يمكن تحويل مسألة الأمثلية المشروطة إلى مسألة الأمثلية غير المقيدة التالية، وهي إيجاد القيمة العظمى للدالة :

$$\begin{cases} f(z_1,z_2,z_3) = \frac{1}{2}(42 \sin^2 z_1)(36 \sin^2 z_2)(72 \sin^2 z_3 \\ \qquad -42 \sin^2 z_1 - 72 \sin^2 z_2) \\ = 4536 \sin^2 z_1 \sin^2 z_2 \,(12 \sin^2 z_3 - 7\sin^2 z_1 - 12 \sin^2 z_2) \end{cases} \tag{٦,١٢٠}$$

لإيجاد أكبر قيمة للدالة f ، نستخدم القيود أو الشروط الضرورية التالية :

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = (4536)(4) \sin z_1 \cos z_1 \sin^2 z_2 \,(6 \sin^2 z_3 - 7 \sin^2 z_1 - 6 \sin^2 z_2) = 0$$

(٦,١٢١)

$$\frac{\partial f}{\partial z_2} = (4536)(2) \sin^2 z_1 \sin z_2 \cos z_2 \,(12 \sin^2 z_3 - 7 \sin^2 z_1 - 24 \sin^2 z_2) = 0$$

(٦,١٢٢)

$$\frac{\partial f}{\partial z_3} = (4536)(24) \sin^2 z_1 \sin^2 z_2 \sin z_3 \cos z_3 = 0 \tag{٦,١٢٣}$$

يتضح من المعادلة (٦,١٢٣) أن $\sin z_1 = 0$ أو $\sin z_2 = 0$ أو $\sin z_3 = 0$ أو $\cos z_3 = 0$. نلاحظ أنه إذا أخذنا $\sin z_1 = 0$ أو $\sin z_2 = 0$ فإنه لا يمكن الحصول على أي معلومات عن z_2 أو z_3 من المعادلات الأخرى وبالتشابه سيؤدي أخذ $\sin z_3 = 0$ إلى حل تافه (عديم الفائدة) $z_1 = z_2 = 0$ من المعادلتين (٦,١٢١)

و(٦ , ١٢٢) لذلك يجب أن تساوي $\cos z_3$ الصفر لتتحقق المعادلة (٦ , ١٢٣) وهذا يؤدي إلى أن $\sin^2 z_3=1$ و $\sin^2 z_1=\frac{4}{7}$ و $\sin^2 z_2=\frac{1}{3}$، وينتظر هذا الحل قيمة عظمى نسبيه للدالة f باستخدام المعادلة (٦ , ١١٩) والمعادلة (٦ , ١١٧) فإن حل المسألة باستخدام المتغيرات الأصلية هو $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)=(24, 12, 12)$.

أي أن الارتفاع يساوي ٢٤سم ، والطول يساوي ١٢سم، والعرض يساوي ١٢سم، ويكون أكبر حجم هو $f_{max} = 3456\ cm^3$.

طريقة حذف المتغيرات

تعتمد الطريقة الثانية وهي حذف المتغيرات (elimination of variables) على استخدام القيود الفعالة في حذف بعض المتغيرات. لنفترض أن لدينا مسألة أمثلية لها m قيد على صيغة متراجحات من المحتمل ألا تكون جميعها فعالة عند النقطة المثلى. فإذا كان من المعروف أن تكون أي من الشروط فعالة عند النقطة المثلى، فيمكن باستخدام معادلات هذه الشروط حذف بعض المتغيرات من المسألة. لهذا لو كان من المعروف أنه يوجد عدد $r(r<n)$ من القيود الفعالة عند النقطة المثلى، فيمكن حذف أي r من المتغيرات في المسألة ونحصل بذلك على مسألة جديدة لها عدد n-r من المتغيرات و m-r من القيود.

سيكون حل هذه المسألة الجديدة أبسط من حل المسألة الأصلية. العائق الرئيسي لهذه الطريقة هو صعوبة معرفة أي من القيود يكون فعالاً عند النقطة المثلى؛ لذا ففي المسألة العامة التي لها m من القيود نحتاج إلى التأكد من الآتي:

(أ) إيجاد القيمة الصغرى للدالة f(x) بدون أي شروط (بفرض عدم وجود قيود فعالة عند النقطة المثلى) .

(ب) إيجاد القيمة الصغرى للدالة f(x) بأخذ قيد مساواة (بفرض أن الشرط فعال عند النقطة المثلى) .

(جـ) إيجاد القيمة الصغرى للدالة $f(\mathbf{x})$ بأخذ كل التبديلات الممكنة من القيود، فعلى سبيل المثال يأخذ قيدين (بفرض أن هذين القيدين فعالان) وهكذا فإذا وجد أي حل يحقق شروط كون توكر الضرورية فمن المرجح أن يكون هذا الحل نهاية صغرى محلية للمسألة الأصلية . يلاحظ أنه في حالة عدم معرفة أي من القيود ستكون فعالة عند النقطة المثلى، فإن عدد المسائل المتوقع حلها هو :

$$1 + m + \frac{m(m-1)}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} + \ldots + \frac{m}{(m-n)!n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{m!}{k!\,(m-k)!}$$

وعلى سبيل المثال إذا كان للمسألة الأصلية 5 متغيرات وعشرة قيود، فإن عدد المسائل المتوقع حلها هو :

$$\sum_{k=0}^{5} \frac{10!}{k!\,(10-k)!} = 638$$

ويلاحظ أن هذا الرقم كبير جداً .

مثال (٦,٨)

أوجد حل المسألة المذكورة في المثال (٦,٧) بفرض أن القيد (٦,١١٣) قيد فعال عند النقطة المثلى .

الحل

يمكن صياغة المسألة كما يلي :

أوجد القيمة العظمى للدالة :

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \qquad (٦,١٢٤)$$

تحت القيود :

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 72 \qquad (٦,١٢٥)$$

$$x_1 \le 42 \qquad (٦,١٢٦)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (٦,١٢٧)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (٦,١٢٨)$$

$$x_3 \geq 0 \quad (٦,١٢٩)$$

بإستخدام المعادلة (٦,١٢٥) يمكن التعبير عن x_1 بالمعادلة :

$$x_1 = 2(36 - x_2 - x_3) \quad (٦,١٣٠)$$

ويمكن التعبير عن دالة الهدف بالمعادلة :

$$f(x_2, x_3) = 2(36\, x_2 x_3 - x_2^2 x_3 - x_2 x_3^2) \quad (٦,١٣١)$$

الآن يمكن إيجاد القيمة العظمى للدالة $f(x_2, x_3)$ على اعتبار أنها مقيدة ويكون الحل مقبولاً إذا حقق القيود من (٦,١٢٦) إلى (٦,١٢٨) بحل المعادلات :

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2(36\, x_3 - 2x_2 x_3 - x_3^2) = 0 \quad (٦,١٣٢)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2(36\, x_2 - x_2^2 - 2x_2 x_3) = 0 \quad (٦,١٣٣)$$

نحصل على $x_2 = 12$ و $x_3 = 12$ ويؤدي هذا إلى أن قيمة $x_1 = 24$ من المعادلة (٦,١٣٠) وحيث أن هذا الحل يحقق القيود من (٦,١٣٠) إلى (٦,١٣٢) فإنه يعتبر حلاً للمسألة الأصلية، ويكون أكبر حجم لمتوازي المستطيلات هو $f(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = x_1^* x_2^* x_3^* = 3456$.

(٦,٤,٢) أساسيات تقريب طريقة الدالة الجزائية

طريقة الدالة الجزائية تحول مسألة الأمثلية الأساسية الي صيغ بديلة حيث يمكن ايجاد الحلول العددية عن طريق حل تتابع من مسائل التصغير غير المقيدة. اعتبر مسألة الأمثلية الأساسية علي الصورة التالية :

$$x_1 \geq 0 \quad (٦,١٢٧)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (٦,١٢٨)$$

$$x_3 \geq 0 \quad (٦,١٢٩)$$

بإستخدام المعادلة (٦,١٢٥) يمكن التعبير عن x_1 بالمعادلة:

$$x_1 = 2(36 - x_2 - x_3) \quad (٦,١٣٠)$$

ويمكن التعبير عن دالة الهدف بالمعادلة:

$$f(x_2, x_3) = 2(36\, x_2 x_3 - x_2^2 x_3 - x_2 x_3^2) \quad (٦,١٣١)$$

الآن يمكن إيجاد القيمة العظمى للدالة $f(x_2, x_3)$ على اعتبار أنها مقيدة ويكون الحل مقبولاً إذا حقق القيود من (٦,١٢٦) إلى (٦,١٢٨) بحل المعادلات:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2(36\, x_3 - 2x_2 x_3 - x_3^2) = 0 \quad (٦,١٣٢)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2(36\, x_2 - x_2^2 - 2x_2 x_3) = 0 \quad (٦,١٣٣)$$

نحصل على $x_2=12$ و $x_3=12$ ويؤدي هذا إلى أن قيمة $x_1=24$ من المعادلة (٦,١٣٠) وحيث أن هذا الحل يحقق القيود من (٦,١٣٠) إلى (٦,١٣٢) فإنه يعتبر حلاً للمسألة الأصلية، ويكون أكبر حجم لمتوازي المستطيلات هو $f(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = x_1^* x_2^* x_3^* = 3456$.

(٦,٤,٢) أساسيات تقريب طريقة الدالة الجزائية

طريقة الدالة الجزائية تحول مسألة الأمثلية الأساسية الي صيغ بديلة حيث يمكن ايجاد الحلول العددية عن طريق حل تتابع من مسائل التصغير غير المقيدة. اعتبر مسألة الأمثلية الأساسية علي الصورة التالية:

أوجد $\mathbf{x}$ التي تصغر الدالة $f(\mathbf{x})$ تحت القيود التالية :

$$g_j(\mathbf{x}) \le 0\,, \quad j = 1, 2, ..., m \tag{٦,١٣٤}$$

تتحول هذه المسألة إلى مسألة تصغير غير مقيدة بتكوين دالة على الصورة :

$$\Phi_K = \Phi(\mathbf{x}, r_k) = f(\mathbf{x}) + r_k \sum_{j=1}^{m} G_j[g_j(\mathbf{x})] \tag{٦,١٣٥}$$

حيث G_j (وتعرف بدوال الحاجز) هي بعض دوال في القيود g_j و $\{r_k\}$ متتابعة مطردة التزايد أو التناقص من الأعداد الموجبة وتعرف بمتتابعة معالم الجزاء وتحقق الشرط $\lim_{k \to \infty} r_k = 0$ (في حالة التناقص).

تتحول هذه المسألة إلى مسألة تصغير غير مقيدة بتكوين دالة على الصورة:

$$\Phi_K = \Phi(\mathbf{x}, r_k) = f(\mathbf{x}) + r_k \sum_{j=1}^{m} G_j[g_j(\mathbf{x})] \tag{٦,١٣٦}$$

حيث G_j (وتعرف بدوال الحاجز) هي بعض دوال في القيود g_j و $\{r_k\}$ هو متتابعة مطردة التزايد أو التناقص من الأعداد الموجبة وتعرف بمتتابعة معالم الجزاء وتحقق الشرط $\lim_{k \to \infty} r_k = 0$ (في حالة التناقص)..

يسمى الحد الثاني في الجهة اليمنى من المعادلة (٦,١٣٦) حد الجزاء وسوف تظهر أهميته فيما بعد. إذا كان التصغير بدون قيود لدالة ϕ مكرر من أجل متوالية من قيم معلمة الجزاء r_k فإن الحل يمكن تقريبه لكي يصبح كحل للمسألة الأصلية المعرفة بالمعادلة (٦,١٣٤) هذا هو السبب الذي من أجله عرفت طريقة دالة الجزاء بما يسمى بأساليب التصغير للمتوالية غير المقيدة (Sequential Unconstrained Minimization Techniques) ويختصر بالرمز (SUMT).

أوجد **x** التي تصغر الدالة $f(\mathbf{x})$ تحت القيود التالية :

$$g_j(\mathbf{x}) \leq 0 , \quad j = 1, 2, ..., m \qquad (٦ , ١٣٤)$$

تتحول هذه المسألة إلى مسألة تصغير غير مقيدة بتكوين دالة على الصورة :

$$\Phi_K = \Phi(\mathbf{x}, r_k) = f(\mathbf{x}) + r_k \sum_{j=1}^{m} G_j[g_j(\mathbf{x})] \qquad (٦ , ١٣٥)$$

حيث G_j (وتعرف بدوال الحاجز) هي بعض دوال في القيود g_j و $\{r_k\}$ متتابعة مطردة التزايد أو التناقص من الأعداد الموجبة وتعرف بمتتابعة معالم الجزاء وتحقق الشرط $\lim_{k \to \infty} r_k = 0$ (في حالة التناقص) .

تتحول هذه المسألة إلى مسألة تصغير غير مقيدة بتكوين دالة على الصورة:

$$\Phi_K = \Phi(\mathbf{x}, r_k) = f(\mathbf{x}) + r_k \sum_{j=1}^{m} G_j[g_j(\mathbf{x})] \qquad (٦ , ١٣٦)$$

حيث G_j (وتعرف بدوال الحاجز) هي بعض دوال في القيود g_j و $\{r_k\}$ هو متتابعة مطردة التزايد أو التناقص من الأعداد الموجبة وتعرف بمتتابعة معالم الجزاء وتحقق الشرط $\lim_{k \to \infty} r_k = 0$ (في حالة التناقص) . .

يسمى الحد الثاني في الجهة اليمنى من المعادلة (٦ , ١٣٦) حد الجزاء وسوف تظهر أهميته فيما بعد. إذا كان التصغير بدون قيود لدالة ϕ مكرر من أجل متوالية من قيم معلمة الجزاء r_k فإن الحل يمكن تقريبه لكي يصبح كحل للمسألة الأصلية المعرفة بالمعادلة (٦ , ١٣٤) هذا هو السبب الذي من أجله عرفت طريقة دالة الجزاء بما يسمى بأساليب التصغير للمتوالية غير المقيدة (Sequential Unconstrained Minimization Techniques) ويختصر بالرمز (SUMT).

يمكن تقسيم صياغة دالة الجزاء من أجل المسائل ذات القيود المتراجحة إلى نوعين تسمى الطرق الداخلية والخارجية ففي الصيغه الداخليةبعض الصيغ المعروفة لشكل G_j هي:

$$G_j = -\frac{1}{g_j(\mathbf{x})} \quad (٦,١٣٧)$$

$$G_j = \log[-g_j(\mathbf{x})] \quad (٦,١٣٨)$$

وبعض الصيغ شائعة الاستخدام لشكل الدالة G_j في حالة الدالة الجزئية الخارجية هي:

$$G_j = \max\ [0, g_j(\mathbf{x})] \quad (٦,١٣٩)$$

$$G_j = \{\max\ [0, g_j(\mathbf{x})]\}^2 \quad (٦,١٤٠)$$

تقع جميع القيم الصغرى غير المقيدة للدالة ϕ_K، في الطرق الداخلية، في منطقة الحل الممكن وتتقارب إلى حل المتراجحة (4.28)من الداخل عندما تتغير r_k بأسلوب معين.

أما القيم الصغرى للدالة ϕ_k غير المقيدة، في الطرق الخارجية، فتقع جميعها في منطقة الحل الممكن وتتقارب إلى الحل المطلوب من الخارج عندما تتحول r_k بأسلوب معين.

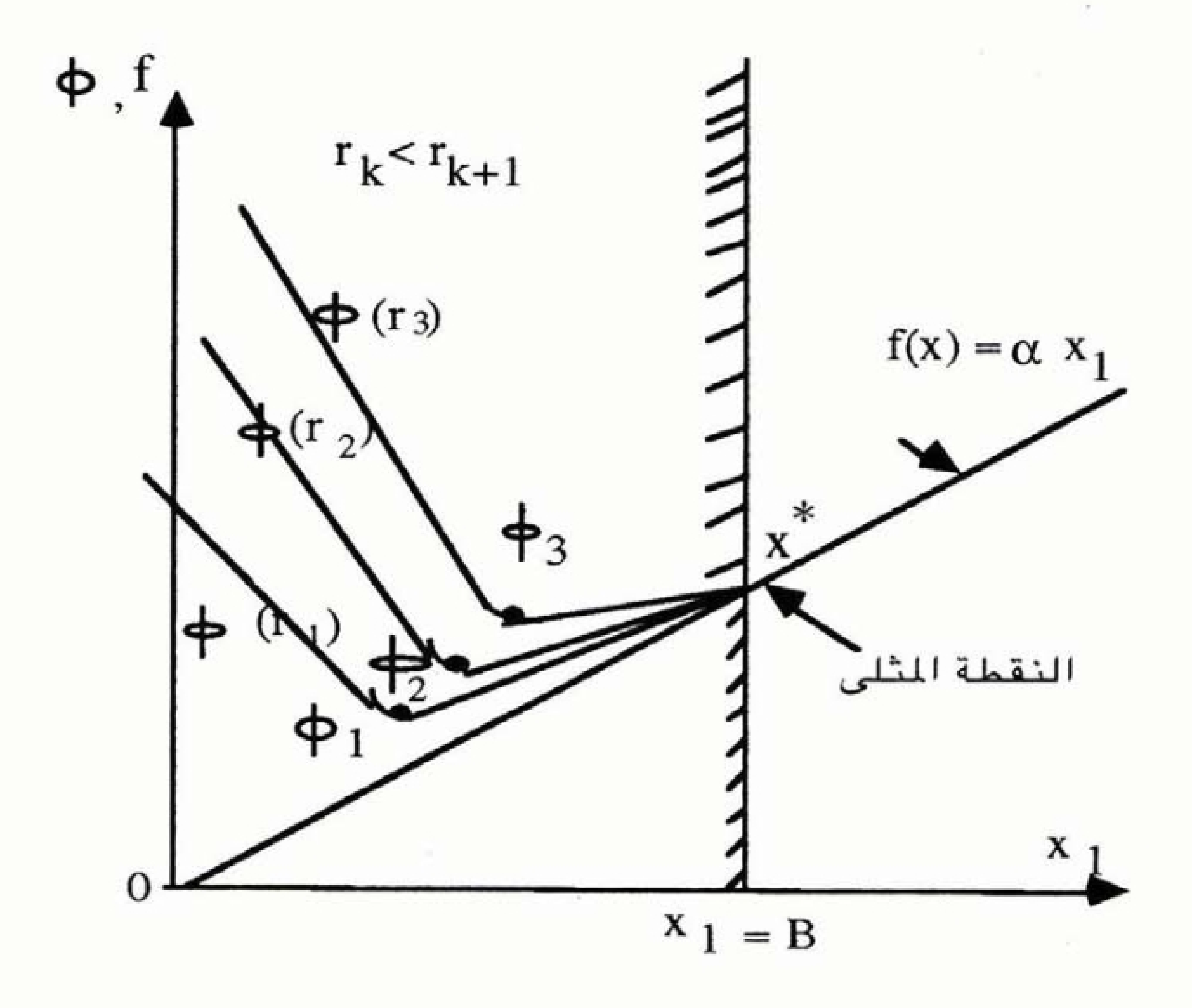
في شكل (٦,٥) تتقارب ϕ_k غير المقيدة للمسألة البسيطة التالية:

أوجد $\mathbf{x} = [x_1]$ التي تصغر $f(\mathbf{x}) = \alpha x_1$

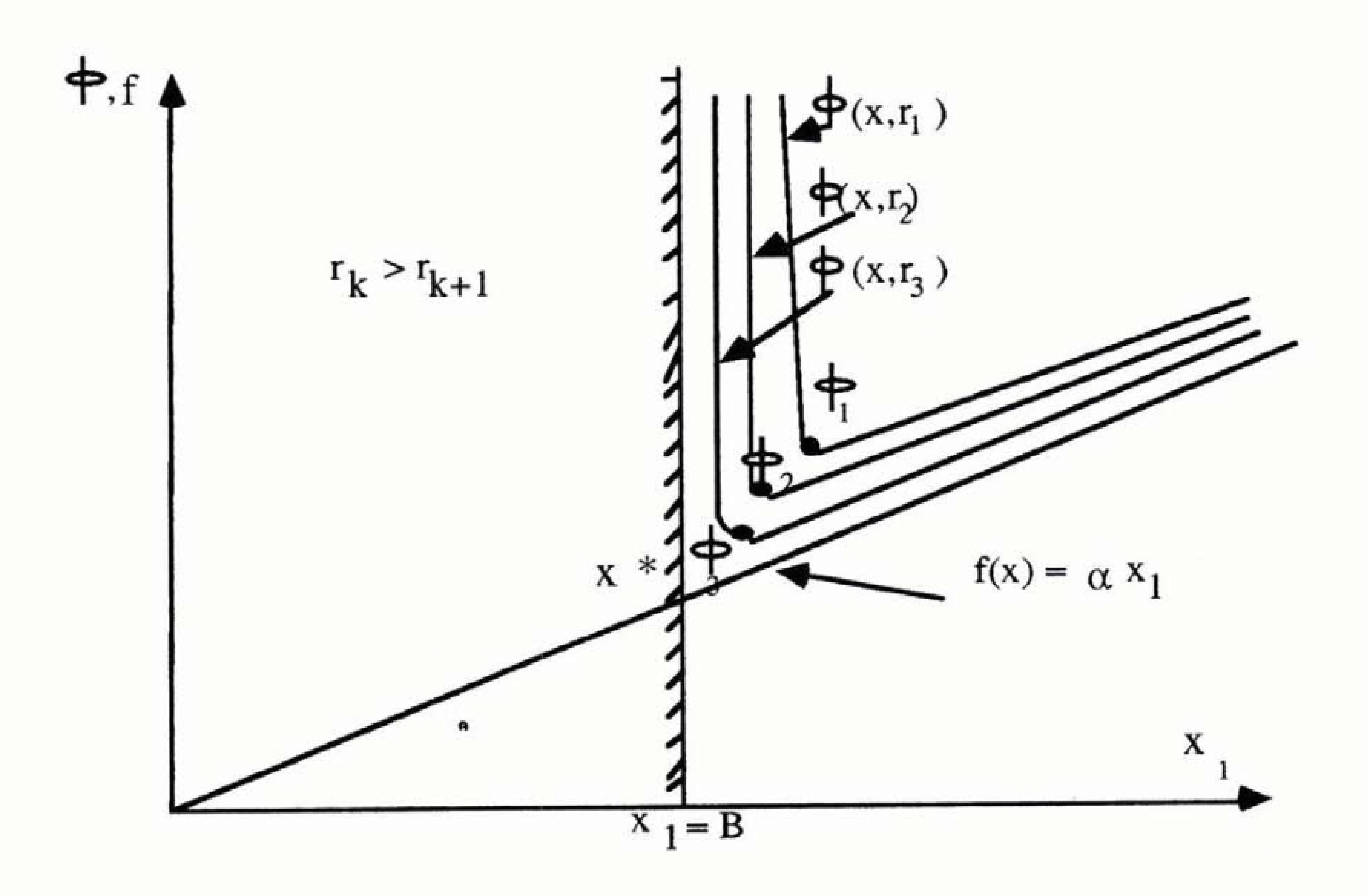
تحت القيد:

$$g_1(\mathbf{x}) = B - x_1 \leq 0$$

من الشكل (٥,٦-أ) يمكن مشاهدة ان القيمة غير المقيدة للدالة $\phi(\mathbf{x}, r_k)$ تتقارب إلى النقطة المثلى x^* عندما يتزايد المتغير r_k تتابعيا. من ناحية اخرى تعطى الطريقة الداخلية الموضحه في الشكل (٥,٦-ب) تعطي تقاربا عندما ينقص المتغير r_k تتابعيا.



الشكل رقم(٥,٦-أ). $G_j[g_j(x)] = \left[\max[0, g_j(x)]\right]^2$



الشكل رقم (٥,٦- ب). $G_j[g_j(x)] = -1/g_j(x)$

سوف نناقش فيما يلي خوارزميات الدوال الجزائية الداخلية و الخارجية.

طريقة الدالة الجزائية الداخلية

كما أشرنا سابقا في طريقة الدالة الجزائية الداخلية، فإنه يتم إنشاء دالة جديدة (الدالة ϕ) بزيادة حدود الجزاء لدالة الهدف. يتم اختيار الحدود الجزائية بحيث تكون قيمها صغيرة عند النقط البعيدة من حدود القيد، وتصل إلى مالانهاية عند الاقتراب من حدود القيد. لذلك عندما تبدأ عملية تصغير الدالة $\phi(\mathbf{x}, r_k)$ غير المقيدة من أي نقطة ممكنة $\mathbf{x}_1$، فإن النقاط المتتالية المولدة ستقع دائما في منطقة الحلول الممكنة، لأن حدود القيد تعمل كحواجز خلال عملية التصغير

ولهذا السبب يطلق على عملية دالة الجزاء الداخلية طريقة الحاجز في دالة ϕ المعرفة كالتالي:

$$\phi(\mathbf{x}, r_k) = f(\mathbf{x}) - r_k \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(\mathbf{x})} \qquad (٦,١٤٢)$$

يلاحظ أن قيمة الدالة ϕ تكون دائما أكبر من f، حيث $g_j(\mathbf{x})$ تكون سالبة لجميع النقاط الممكنة وإذا تحقق أي قيد $g_j(\mathbf{x})$ (بعلاقة مساواة) فإن قيمة ϕ تؤول الى مالانهاية. و يؤدي هذا إلى وجود عيوب رئيسية عند استعمال المعادلة (٦,١٤٢) حيث إن هذه الصيغة لا تسمح بمخالفة أي قيد، فهي تتطلب نقطة بداية ممكنة (تحقق جميع القيود) للبحث نحو النقطة المثلى. وسوف نوضح طريقة لإيجاد نقطة البداية الممكنة. حيث أن نقطة البداية، وكذلك النقاط المتتالية المولدة بهذه الطريقة تقع داخل منطقةالحل للفراغ المصمم ، لذلك صنفت هذه الطريقة على أنها صياغة الدالة الجزائية الداخلية. يمكن تلخيص الإجراءات التكرارية لطريقة الحاجز (barrier) فيما يلي:

العمليات التكرارية

١ - ابدأ بنقطة أولية $\mathbf{x}_1$ تحقق جميع القيود بدون تحقق علامة التساوي، أي أن:

$$g_j(\mathbf{X}) < 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, m$$

وقيمة اولية $r_1 > 0$، وضع $k = 1$.

٢ - صغر الدالة $\phi(\mathbf{x}, r_k)$ باستخدام أي من طرق التصغير غير المقيدة واحصل على الحل $\mathbf{x}_k^*$.

٣ - اختبر ما إذا كانت $\mathbf{x}_k^*$ هي الحل الأمثل للمشكلة الأصلية. فإذا كانت $\mathbf{x}_k^*$ هي النقطة المثلى أوقف العمليات، وإذا لم تكن كذلك فانتقل إلى الخطوة التالية.

٤ - أوجد قيمة معلمة الجزاء التالية r_{k+1} من العلاقة $r_{k+1} = c.r_k$ حيث $c < 1$.

٥ - ضع $k \rightarrow k+1$ مع أخذ نقطة البداية الجديدة $x_1 = x_k^*$ ثم ارجع ونفذ الخطوة ٢.

يوجد عدد من النقط التي يجب اعتبارها عند تنفيذ هذه الطريقة، وهي :

(أ) ملاحظة عدم توفر نقطة البداية في بعض الحالات

(ب) يجب ايجاد قيمة مناسبة لمعلمة الجزاء الإبتدائية r_1

(جـ) يجب إيجاد إختيار قيمة مناسبة لمعامل الضرب c .

(د) يجب إختيار أسلوب تقارب مناسب لمعرفة النقطة المثلى

(هـ) يجب ان تكون القيود معايرة (normalized) بحيث إن كلا منها يكون بين (0 , 1-) فقط

وسوف نناقش هذه المفاهيم فيما يلي :

نقطة البدء الممكنة x_1 (التي تحقق جميع القيود)

في المسائل العملية من الممكن إيجاد نقطة مبدئية تحقق جميع القيود. بينما في بعض المواقف حيث النقط الممكنة مصممة، فإنه ليس من السهل إيجاد هذه النقطة. في مثل هذه الحالات يمكن إيجاد هذه النقطة باستخدام طريقة الدالةالجزائية الداخلية كما يلي :

١- اختيار نقطة اختيارية $\mathbf{x}_1$. حيث إن النقطة $\mathbf{x}_1$ اختيارية فمن المحتمل أنها لا تحقق كل القيود بإشارة عدم التساوي المحددة، فإذا كانت r من الشروط التي عددها m غير محققة أي أن :

$$\left.\begin{array}{ll} g_j(\mathbf{x}_1) < 0 & ,j=1,2,...m-r \\ g_j(\mathbf{x}_1) \geq 0 & ,j=m-r+1,m-r+2,...,m \end{array}\right\} \quad (٦,١٤٣)$$

٢- عين القيد الأكثر انتهاكا عند النقطة $\mathbf{x}_1$ وذلك بإيجاد k بحيث إن :

$$g_k(\mathbf{x}_1) = \max\,[g_j(\mathbf{x}_1)\ ,\ j=m-r+1,m-r+2,...,\ m\ ] \quad (٦,١٤٤)$$

٣- الآن ضع صياغة لمسألة أمثلية جديدة كما يلي :

أوجد $\mathbf{x}$ التي تصغر $g_k(\mathbf{x})$ تحت القيود :

$$g_j(\mathbf{x}) \leq 0\ ,\quad j = 1, 2, \ldots, m - r$$

و $$g_j(\mathbf{x}) - g_k(x_1) \leq 0,\ \ j = m\text{-}r\text{+}1,\ m\text{-}r\text{+}2, \ldots, k\text{-}1,\ k\text{+}1, \ldots, m$$

٤- حل مسألة الامثلية المصوغة في الخطوة (٣) بأخذ النقطة $\mathbf{x}_1$ كنقطة بداية ممكنة واستخدام طريقة الدالة الجزائية الداخلية مع ملاحظة أن الإجراءات تتوقف عندما تكون قيمة دالة الهدف $g_k(\mathbf{x})$ أقل من الصفر . ولهذا سوف يكون الحل الناتج $\mathbf{x}_m$ محققا، على الأقل، قيد زيادة على الذي حققته النقطة $\mathbf{x}_1$.

٥- إذا كانت القيود غير محققة عند النقطة $\mathbf{x}_m$ ضع نقطة البداية الجديدة $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_m$ ثم أعد ترقيم القيود بحيث تكون القيود الاخيرة التي عددها r غير محققة (مع ملاحظة ان قيمة r سوف تكون مختلفة عن سابقتها) ثم نفذ الخطوة (٢) هذه الإجراءات تتكرر حتى تتحقق كل القيود، ونكون قد حصلنا على نقطة $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_m$ التي لها :

$$g_j(\mathbf{X}) \leq 0 \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

القيمة الأولية لمعامل الجزاء (r_1)

بما أن دالة التصغير غير المقيدة $\phi(\mathbf{x}, r_k)$ يجب إجراؤها لمتتابعة متناقصة r_k ، فقد يظهر أنه باختيار قيمة صغيرة جدا للمعامل r_1 يمكننا تفادي عدد زائد من التصغيرات للدالة ϕ ولكن من وجهة نظر حسابية ، يكون من السهل تصغير الدالة غير المقيدة $\phi(\mathbf{x}, r_k)$. إذا كان r_k كبيرة يمكن مشاهدة ذلك من الشكل (٤ -١ب) حيث يتضح أن قيمة الدالة ϕ تتغير أكثر سرعة بجوار القيمة الصغرى ϕ_k^* حيث إنه من الأسهل إيجاد القيمة الصغرى لدالة يكون رسمها أكثر نعومة (smoother)، سوف يكون التصغير المقيد للدالة أكثر سهولة إذا كانت كبيرة .

على أية حال ستكون القيمة الصغرى للحل $\mathbf{x}_k^*$ ، ϕ_k أكثر بعدا عن القيمة الصغرى المطلوبة $\mathbf{x}^*$ إذا كانت r_k كبيرة لذلك فإنه يتطلب عددا زائدا من التصغيرات غير المقيدة للدالة $\phi(\mathbf{x}, r_k)$ (لعدة قيم للمعامل r_k) للوصول إلى النقطة $\mathbf{x}^*$. فإذا أختيرت r_1 لكي تكون عددا كبيرا جدا. لذلك يجب اختيار قيمة معتدلة لمعامل الجزاء الأولى r_1 ؛ عمليا تساوي قيمة r_1 التي تعطي قيمة $\phi(\mathbf{x}_1, r_k)$ تقريبا 1.1 إلى 2.0 مضروبا في قيمة الدالة $f(\mathbf{x}_1)$ وجدت بأنها مناسبة جدا في إيجاد تقارب سريع للعملية. لذلك فلأي نقطة بداية ممكنة $\mathbf{x}_1$ فإن قيمة r_1 تؤخذ كالتالي :

$$\text{من} \quad (r_1 = 0.1) \quad \text{إلى} \quad r_1 = 0.1 \left(\frac{f(\mathbf{x}_1)}{\left[-\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(\mathbf{x}_1)} \right]} \right) \qquad (٦,١٤٦)$$

القيم المتتالية لمعامل الجزاء

عند إختيار القيمة الأولية r_k ، فإن القيم التالية للمعامل r_k يجب اختيارها بحيث إن :

$$r_{k+1} < r_k \qquad (٦,١٤٧)$$

للملائمة فإن قيم r_k تختار تبعا للعلاقة :

$$r_{k+1} = c.r_k \qquad (٦,١٤٨)$$

بحيث إن $c < 1$ وقيمة c يمكن أن تؤخذ كالآتي :

0.1 أو 0.2 أو 0.5 أو . . . إلخ

سلوك التقارب

بما أنه يجب إجراء عملية التصغير غير المقيدة للدالة $\phi(\mathbf{x}, r_k)$ لقيم متتابعة

متناقصة لقيم r_k ، فإنه من الضروري استعمال سلوك تقارب مناسب لتعريف النقطة المثلى ولتفادي عدد كبير غير ضروري من التصغيرات غير المقيدة.

يمكن إيقاف الإجراءات التكرارية حينما تتحقق الشروط التالية:

١- الفرق البيني لقيم دالة الهدف التي توجد عند نهاية متتابعتين للتصغيرات غير المقيدة الذي يقع تحت رقم صغير ε_1 بمعنى

$$\left| \frac{f(\mathbf{x}_k^*) - f(\mathbf{x}_{k-1}^*)}{f(\mathbf{x}_k^*)} \right| \leq \varepsilon_1 \qquad (٦,١٤٩)$$

٢- الفرق بين النقطتين المثلتين x_k^* و x_{k-1}^* يصبح صغيرا جدا وهذا يمكن الحكم عليه بعدة طرق سوف نورد بعضا منها فيما يلي:

$$\left| (\Delta \mathbf{x})_i \right| \leq \varepsilon_2 \qquad (٦,١٥٠)$$

حيث $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_{k-1}^*$ و $(\Delta \mathbf{x})_i$ تكون المركبة i للمتجه $\Delta \mathbf{x}$:

$$\begin{cases} \max \left| (\Delta \mathbf{x})_i \right| \leq \varepsilon_3 \\ \left\| \Delta \mathbf{x} \right\| = \left[\left(\Delta \mathbf{x} \right)_1^2 + \left(\Delta \mathbf{x} \right)_2^2 + \dots + \left(\Delta \mathbf{x} \right)_n^2 \right]^{1/2} \leq \varepsilon_4 \end{cases} \qquad (٦,١٥١)$$

لاحظ أن القيم من ε_1 إلى ε_4 يجب اختيارها اعتمادا على طبيعة المشكلة تحت المناقشة.

مثال (٦,٩)

أوجد القيمة الصغرى للدالة:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{3}(x_1 + 1)^3 + x_2$$

تحت القيود:

$$g_1(x_1, x_2) = -x_1 + 1 \leq 0$$

$$g_2(x_1, x_2) = -x_2 \leq 0$$

الحـــل

لتوضيح طريقة دالة الجزاء الداخلية، تستخدم طريقة الحساب لحل مسألة التصغير غير المقيدة حيث لا نحتاج إلى نقطة ابتداء $\mathbf{x}_1$ بحيث تحقق القيدين.

الدالة ϕ تكون:

$$\Phi(\mathbf{x}\ , r) = \frac{1}{3}\,(x_1+1)^3 + x_2 - r\left[\frac{1}{-x_1+1} - \frac{1}{x_2}\right]$$

لإيجاد دالة التصغير غير المقيدة للدالة Φ تستخدم الشروط الضرورية

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_1} = (x_1+1)^2 - \frac{r}{(1-x_1)^2} = 0$$

أي أن:

$$(x_1^2 - 1)^2 = r$$

أي أن:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 1 - \frac{r}{x_2^2} = 0$$

أي أن :

$$x_2^2 = r$$

من المعادلتين السابقتين نحصل على :

$$x_1^*(r) = (r^{1/2}+1)^{1/2} \quad , \ x_2^*(r) = r^{1/2}$$

و

$$\Phi_{\min}(r) = \left\{\frac{1}{3}\left[(r^{1/2}+1)^{1/2}+1\right]^3 + 2\,r^{1/2} - \frac{1}{\frac{1}{r} - \left(\frac{1}{r^{3/2}} + \frac{1}{r^2}\right)^{1/2}}\right\}$$

وللحصول على حل المسألة الأصلية فإننا نعلم أن :

$$f_{min} = \lim_{r\to 0} \Phi_{min}(r)$$

$$x_1^* = \lim_{r\to 0} x_1^*(r)$$

و

$$x_2^* = \lim_{r\to 0} x_2^*(r)$$

يحتوي الجدول رقم (٦,٣) على قيم الدالة x_2^*, x_1^*, f المناظرة للمتتابعة المتناقصة لحد الجزاء **r**

الجدول رقم (٦,٣).

قيمة r	$x_1^*(r) = (r^{1/2}+1)^{1/2}$	$x_2^*(r) = r^{1/2}$	$\Phi_{min}(r)$	f(r)
1000	5.7164	31.62278	376.2636	132.4003
100	3.31662	10.00000	89.9772	36.8109
10	2.04017	3.16228	25.3048	12.5286
1	1.41421	1.00000	9.1046	5.6904
0.1	1.14727	0.31623	4.6117	3.6164
0.01	1.04881	0.10000	3.2716	2.9667
0.001	1.01569	0.03162	2.8569	2.7615
0.0001	1.00499	0.01000	2.7267	2.6967
0.00001	1.00158	0.00316	2.6856	2.6762
0.000001	1.00050	0.00100	2.6727	2.6697
0	1	0	8/3	الحل 8/3

مشكلة البرمجة المحدبة

لقد لاحظنا فيما سبق التصغير التسلسلي للدالة :

$$\Phi(\mathbf{x}, r_k) = f(\mathbf{x}) - r_k \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(\mathbf{x})}, \ r_k>0 \qquad (٦,١٥٢)$$

وبتنقيص قيم r_k المتتابعة نحصل على x_k^* . عندما $k\to\infty$ تتقارب النقط x_k^* إلى

نقطة تصغير المسألة المقيدة:

$$f(\mathbf{x})$$

تحت القيود :

$$g_j(\mathbf{X}) \leq 0 \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

ومن أجل التأكد من الحد الأدنى الشامل للدالة $\phi(\mathbf{x}, r_k)$ لكل قيم r_k الموجبة، فإن الدالة ϕ يجب أن تكون دالة حادة التحدب (strictly) في $\mathbf{x}$. وتعطينا النظرية التالية الشروط الكافية لكي تكون الدالة ϕ حادة التحدب، وسوف نترك البرهان بسبب احتياجه إلى تفصيلات قد تتجاوز مستوى الدارس لهذا الكتاب.

إذا كانت ϕ محدبة، فإنه لجميع قيم $r_k > 0$ توجد نهاية صغرى وحيدة للدالة $\phi(\mathbf{x}, r_k)$.

نظرية (٦,٢)

إذا كانت $f(\mathbf{x})$ و $g_j(\mathbf{x})$ محدبة وعلى الأقل واحدة من $f(\mathbf{x})$ و $g_j(\mathbf{x})$ محدبة بالتحديد، فإن الدالة $\phi(\mathbf{x}, r_k)$ والمعرفة بالمعادلة (٦,١٥٢) سوف تكون محدبة بالتحديد في $\mathbf{x}$.

طريقة الدالة الجزائية الخارجية

في طريقة الدالة الجزائية الخارجية، تؤخذ الدالة ϕ بصفة عامة كما يلي:

$$\Phi(\mathbf{x}, r_k) = f(\mathbf{x}) + r_k \sum_{j=1}^{m} \langle g_j(\mathbf{x}) \rangle^q \qquad (٦,١٥٣)$$

حيث r_k معلمة جزائية موجبة والأس q مقدار ثابت غير سالب. والدالة $\langle g_j(\mathbf{x}) \rangle$ تعرف كالتالي:

$$\langle g_j(\mathbf{x}) \rangle = \max \langle g_j(\mathbf{x}), 0 \rangle$$

$$(٦,١٥٤) \qquad = \begin{cases} g_j(\mathbf{x}) & \text{(أي أن القيد غير محقق)} \quad \text{إذا كان } g_j(\mathbf{x})>0 \\ 0 & \text{(أي أن القيد محقق)} \quad \text{إذا كان } g_j(\mathbf{x})>0 \end{cases}$$

يتضح من المعادلة (٦,١٥٣) تأثير الحد الثاني في الطرف الأيمن من المعادلة في زيادة الدالة $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{r}_k)$ التي تتناسب مع الكمية التي تنتهك بها القيود مرفوعة لقوى q. لهذا سوف يكون هناك جزاء لتخطي القيود، وسوف يتزايد مقدار الجزاء بمعدل أسرع بالمقارنة بالمقدار الذي يتخطى به القيد (في حالة $q>1$)، ولهذا السبب سميت هذه الصيغة طريقة الدالة الجزائية. أحيانا يكون للدالة $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{r}_k)$ نهاية صغرى كدالة في x، في منطقة خارج منطقة الحلول الممكنة. تتقارب نقطة النهاية الصغرى غير المقيدة $\mathbf{x}_k^*$ إلى الحل الأمثل للمسألة الأصلية عندما $k\to\infty$ و $r_k\to\infty$ والنقطة $\mathbf{x}_k^*$ تقع أخيرا في منطقة الحلول الممكنة.

ندرس الآن المعادلة (٦,١٥٣) لقيم مختلفة للمقدار q:

١ - إذا كانت $q=0$

في هذه الحالة تعطي الدالة ϕ كالتالي:

$$\Phi(\mathbf{x}\ ,\mathbf{r}_k) = \mathrm{f}(\mathbf{x}) + \mathrm{r}_k \sum_{j=1}^{m} < g_j(\mathbf{x})\ , > 0$$

$$(٦,١٥٥) \qquad = \begin{cases} f(\mathbf{x})+m\, r_k & \text{إذا كانت } g_j(\mathbf{x})>0 \\ f(\mathbf{x}) & \text{إذا كانت } g_j(\mathbf{x})\le 0 \end{cases}$$

هذه الدالة غير متصلة على حدود منطقة الحلول الممكنة، وبالتالي فإنه من الصعب تصغير هذه الدالة.

٢ - إذا كانت $0<q<1$ هنا تكون الدالة ϕ غيرمتصلة، ولكن الجزاء لتخطي شرط سوف يكون صغير جداً. أيضاتكون مشتقات الدالة ϕ غير متصلة على الحدود ولهذا يكون من الصعب تصغير الدالة .

٣ - إذا كانت $q = 1$ فإن زانجويل (انظر Zangwill 1962) أوضح أنه في هذه الحالة، وتحت ضوابط معينة توجد قيمة كبيرة للمعلمية r_0 كبرا كافيا بحيث إن النهاية الصغرى للدالة $\phi(\mathbf{x}, r_k)$ هي بالضبط النهاية الصغرى المقيدة للمسألة الأصلية لكل قيم $r_k > r_0$. بينما يكون محيط (كفاف) الدالة ϕ مشتقات أولى غير متصلة على الحدود. وبالتالي فالطريقة غير جذابة من وجهة نظر الحسابات.

٤ - إذا كانت $q > 1$: سوف يكون للدالة ϕ مشتقات من الرتبة الأولى. تعطى هذه المشتقات بالمعادلة التالية:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + r_k \sum_{j=1}^{m} q < g_j(\mathbf{x}) >^{q-1} \frac{\partial g_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

وبصفة عامة، في الحسابات العملية، نختار قيمة q تساوي 2. سوف نختار $q > 1$ في المناقشات التالية لهذه الطريقة.

الخوارزمية

يمكن تنفيذ طريقة دالة الجزاء الخارجية بالخطوات التالية:

١ - ابدأ من نقطة $\mathbf{x}_1$ وقيمة مناسبة للمعلمية r_1 وضع $k = 1$.

٢ - أوجد المتجه $\mathbf{x}_k^*$ الذي يصغر الدالة:

$$\Phi(\mathbf{x}, r_k) = f(\mathbf{x}) + r_k \sum_{j=1}^{m} < g_j(\mathbf{x}) >^q$$

٣ - اختبر ما إذا كانت النقطة $\mathbf{x}_k^*$ تحقق كل الشروط. فإذا كانت $\mathbf{x}_k^*$ ممكنة تكون هي النقطة المثلى المطلوبة، وعند ذلك أوقف التكرار. أما إذا كانت النقطة $\mathbf{x}_k^*$ لا تحقق كل الشروط نفذ الخطوة (٤).

٤ ـ اختر القيمة التالية لمعلمية الجزاء التي تحقق العلاقة :

$$r_{k+1} > r_k$$

ثم ضع $k = k + 1$ ونفذ خطوة (٢) .

يمكن اختيار r_{k+1} ببساطة من المعادلة $c = \frac{r_{k+1}}{r_k}$ حيث c ثابت أكبر من الواحد .

مثال (١٠ , ٦)

صغر الدالة :

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{3}(x_1 + 1)^3 + x_2$$

تحت القيود ؛

$$1 - x_1 \leq 0$$
$$-x_2 \leq 0$$

الحل

لتوضيح طريقة دالة الجزاءالخارجية سوف نحل مسألة التصغير غير المقيدة باستخدام حساب التفاضل ، حيث إنه ليس من الضروري أن نحتاج نقطة تجريبية $\mathbf{x}_1$.

تكتب الدالة ϕ كما يلي :

$$\Phi(\mathbf{x}_1, r) = \frac{1}{3}(x_1 + 1)^3 + x_2 + r\,[\max(0, 1 - x_1)]^2 + r\,[\max(0, -x_2)]^2$$

الشروط الضرورية لتكون للدالة غير المقيدة $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{r}_k)$ نهاية صغرى هي :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} = (x_1+1)^2 - 2r\,[\max(0,1-x_1)] = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} = 1 - 2r\,[\max(0,-x_2)] = 0$$

وهذه المعادلات يمكن كتابتها كما يلي :

$$\min\left[(x_1+1)^2\ ,\ (x_1+1)^2 - 2r(1-x_1)\right] = 0 \qquad (٦,١٥٦)$$

$$\min\left[1\ ,\ 1 + 2r\,x_2\right] = 0 \qquad (٦,١٥٧)$$

فمن المعادلة (٦,١٥٧) إذا كان $(x_1+1)^2 = 0$ فإن $x_1 = -1$ (فهذا ينتهك القيد الأول)، و إذا كان $(x_1+1)^2 - 2r(1-x_1) = 0$ فإن $x_1 = -1-r+\sqrt{r^2+4r}$ فيالمعادلة (٦,١٥٨) الاحتمال الوحيد هو أن $1+2rx_2 = 0$ ومنها $x_2 = -\frac{1}{2r}$ لهذا يكون حل مسألة التصغير غير المقيدة هو :

$$x_1^*(r) = -1-r+r(1+\frac{4}{r})^{1/2} \qquad (٦,١٥٨)$$

$$x_2^*(r) = -\frac{1}{2r} \qquad (٦,١٥٩)$$

ومن هذا فإن حل المسألة الأصلية المقيدة يكون :

$$x_1^* = \lim_{r\to\infty} x_1^*(r) = 1,\quad x_2^* = \lim_{r\to\infty} x_2^*(r) = 0$$

و

$$f_{min} = \lim_{r\to\infty} \Phi_{min}(r) = 8/3$$

ويمكن ملاحظة تقارب هذه الطريقة عندما تزداد r تدريجيا من الجدول (٦,٤).

الجدول رقم (٦,٤).

r	x_1^*	x_2^*	$\Phi_{min}(r)$	$f_{min}(r)$
0.001	-0.93775	-500.000	-249.9962	-500.0000
0.01	-0.80975	-50.000	-24.9650	-49.9977
0.1	-0.45969	-5.000	-2.2344	-4.9474
1	0.23607	-0.5000	0.9631	0.1295
10	0.83216	-0.0500	2.3068	2.0001
100	0.98039	-0.0050	2.6249	2.5840
1000	0.99800	-0.00050	2.6624	2.6582
100000	0.99963	-0.00005	2.6655	2.6652
∞	1	0	8/3	8/3

(٦,٥) تمارين

١ - باستخدام شروط كون–توكر (kuhn-tucker) أوجد النهايةالعظمى لدالة الهدف التالية:

$$z = x_1 - x_2$$

تحت الشروط:

$$x_1^2 + x_2^2 \le 5$$
$$x_1 - x_2 \le 1$$

٢ - باستخدام شروط كون - توكر أوجد قيمة B التي تجعل النقطة $x_1^* = 1$, $x_2^* = 2$ نهاية عظمى حيث إن دالة الهدف هي $z = 2x_1 + Bx_2$

تحت القيود:

$$x_1^2 + x_2^2 - 5 \le 0$$

$$x_1 + x_2 - 2 \le 0$$

٣ - أوجد النهاية الصغرى للدالة التالية باستخدام شروط كون - توكر:

$$z = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 5)^2$$

تحت القيود :

$$- x_1^2 + x_2 \leq 4$$
$$- (x_1 - 2)^2 + x_2 \leq 3$$

٤ - بين باستخدام شروط كون - توكر أن النهاية الصغرى لدالة الهدف :

$$z = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 2x_2$$

تحت القيود :

$$x_1 + x_2 \leq 1$$
$$-x_1 + 6x_2 \leq 2$$
$$x_1 \geq 2 \ , \ x_2 \geq 2$$

تكون عند النقطة $x_2 = \frac{3}{7}$ ، $x_1 = \frac{4}{7}$ ، وما قيمة النهاية الصغرى ؟

٥ - أوجد النهاية الصغرى مستخدما شروط كون - توكر للدالة :

$$z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$$

تحت القيود:

$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$
$$8x_1 + 5x_2 \geqq 10$$
$$x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0$$

٦- أوجد النهاية العظمى لدالة الهدف التالية :

$$z = 20x_1 - 10x_2 - 3x_1^2 - x_2^2$$

تحت القيود:

$$2x_1 - x_2 \leq 6$$
$$-x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0$$

٧- بإستخدام طريقة قطع المستوى أوجد أصغر قيمة للدالة :

$$f(\mathbf{x}) = 9x_1^2 + 6x_2^2 + x_3^2 - 18x_1 - 12x_2 - 6x_3 - 8$$

تحت القيود :

$$x_1+2x_2+x_3 \leq 4$$

$$x_i \geq 0\ ,\ \ i = 1, 2, 3$$

مبتدئاً من النقطة $x_1 = (0, 0, 0)$.

٨ - أوجد أصغر قيمة للدالة :

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 - 4$$

تحت القيود :

$$x_1+2x_2 \leq 5$$

$$4x_1+3x_2 \leq 10$$

$$6x_1+x_2 \leq 7$$

$$x_i \geq 0 \quad , \quad i = 1\ , 2$$

مبتدئا من النقطة $x_1 = (1, 1)$ ، وذلك باستخدام طريقة زونتدجيك .

٩ - أوجد أصغر قيمة للدالة :

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 8x_2 + 10$$

تحت القيود :

$$4x^2_1+x^2_2 \leq 10$$

$$3x_1+5x_2 \leq 15$$

$$x_i \geq 0 \quad , \quad i = 1\ , 2$$

مبتدئا من النقطة $x_1 = (1, 1)$ ، باستخدام طريقة زونتدجيك .

١٠ - أوجد أصغر قيمة للدالة :

$$f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 x_2 - 4x_1 - 6x_2$$

تحت القيود :

$$x_1+x_2 \leq 2$$

$$x_1+5x_2 \leq 15$$

$$-x_i \leq 0 \quad , \quad i = 1\ , 2$$

مبتدئا من النقطة $x_1 = (0, 0)$ ، باستخدام طريقة زونتدجيك .

١١- أوجد أكبر قيمة للدالة:

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = [9 - (x_1 - 3)^2]\, x_2^3/27\sqrt{3}$$

تحت القيود:

$$x_1 \geq 0$$

$$0 \leq x_2 \leq x_1/\sqrt{3}$$

$$0 \leq x_1 + \sqrt{3}\, x_2 \leq 6$$

باستخدام تقنيات التحويل باعتماد المسألة أمثلية غير مقيدة.

١٢- أوجد أصغر قيمة للدالة:

$$f(x) = x^2 - 10x - 1$$

تحت الشرط:

$$x - 1 < 0$$

بنقطة بداية $x_1 = -3$ ، وباستخدام كل من:

(أ) طريقة الدالة الجزائية الخارجية.

(ب) طريقة طريقة الدالة الجزائية الداخلية.



تحت الشروط :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le b_j \quad , \quad i = 1 , 2 , \dots , m \qquad (٧,٢)$$

$$x_j \ge 0 \quad , \quad j = 1 , 2 , \dots , n \qquad (٧,٣)$$

كما يمكن كتابة الشكل العام السابق بالصيغة المصفوفية كما يلي :

أوجد أكبر (أصغر) قيمة للدالة :

$$f = C\,X + \frac{1}{2}\, X^T D\, X \qquad (٧,٤)$$

تحت الشروط :

$$A\,X \le b \qquad (٧,٥)$$

$$X \ge 0 \qquad (٧,٦)$$

حيث إن :

$$\mathbf{X} = (x_1 , x_2 , \dots , x_n)^T$$

$$\mathbf{C} = (c_1 , c_2 , \dots , c_n)$$

$$\mathbf{b} = (b_1 , b_2 , \dots , b_m)^T$$

$$\mathbf{D} = (d_{jk}) \qquad j, k = 1, 2, \dots, n$$

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) \qquad (i = 1, 2, \dots, m) \quad , \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

لاحظ أن المصفوفة D متماثلة من الرتبة n ، والمصفوفة A بأبعاد $(m \times n)$ في حالة التصغير تكون المصفوفة D متماثلة ومحددة الإيجاب (أي أن الحد التربيعي $\mathbf{X}^T\ \mathbf{D}\ \mathbf{X}$ في $\mathbf{X}$ يكون موجباً لجميع قيم $\mathbf{X}$ ما عدا الحالة التي تكون فيها جميع قيم $\mathbf{X}$ صفرية). وفي حالة التكبير تكون $\mathbf{D}$ سالبة محددة (أي أن $\mathbf{X}^T\ \mathbf{D}\ \mathbf{X} < 0$ لجميع قيم $\mathbf{X}$ ما عدا الحالة التي تكون فيها جميع قيم $\mathbf{X}$ صفرية). ويترتب على ذلك أن تكون دالة الهدف لمسألة البرمجة التربيعية حادة التحدب في $\mathbf{X}$ في حالة التصغير وتكون حادة التقعر في $\mathbf{X}$ في حالة التكبير .

نناقش في هذا الفصل طريقتين لحل مسائل البرمجة التربيعية التي لها شروط خطية وهما طريقة وولف (Wolfe)، وطريقة بيل (Beale).

(٧,٢) طريقة وولف

يمكن اشتقاق شروط كون - توكر الضرورية والكافية لإيجاد الحل الأمثل لمسألة تكبير دالة الهدف التربيعية تحت قيود خطية كما في الملاحظات الثلاث التالية :

أولاً : أدخل متغيرات متممة (إضافية) إلى القيود (٧,٥) و (٧,٦) فتصبح المسألة كالتالي :

أوجد أكبر قيمة للدالة :

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\ \mathbf{X} - \frac{1}{2}\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\ \mathbf{D}\ \mathbf{X}$$

تحت الشروط :

$$A\,X + S^2 = b$$

$$-X + \mathbf{r}^2 = 0$$

حيث :

$$S = \left(s_1\ ,\ s_2\ ,\ \ldots\ ,\ s_m\right)^T$$

$$S^2 = \left(s_1^2\ ,\ s_2^2\ ,\ \ldots\ ,\ s_m^2\right)^T$$

$$\mathbf{r} = \left(r_1\ ,\ r_2\ ,\ \ldots\ ,\ r_n\right)^T$$

$$\mathbf{r}^2 = \left(r_1^2\ ,\ r_2^2\ ,\ \ldots\ ,\ r_m^2\right)^T$$

ثانياً: يمكن كتابة دالة لاجرانج في هذه الحالة كما يلي :

$$L\left(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{S}\ ,\ \mathbf{r}\ ,\ \lambda\ ,\ \mu\right) = f(\mathbf{x}) - \lambda(Ax + s^2 - b) - \mu(-\mathbf{x} + \mathbf{r}^2)$$

ثالثاً: نفاضل دالة لاجرانج $L\left(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{S}\ ,\ \mathbf{r}\ ,\ \lambda\ ,\ \mu\right)$ جزئياً بالنسبة إلى

مركبات $\mathbf{x}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{r}$, λ , μ ، ثم نساوى هذه المشتقات بالصفر للحصول على شروط كون – توكر المستقرة للدالة L ، أي أن :

$$(\text{٧,٨}) \quad \begin{cases} \mathbf{C} - \frac{1}{2}\left(2\,\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\ \mathbf{D}\right) - \lambda\,A + \boldsymbol{\mu} = 0 \\ \text{أو} \\ c_j - \sum_{k=1}^{n} x_k\ d_{jk} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\ a_{ij} + \mu_j = 0\,, \\ \qquad j = 1\,,2\,,\dots,n \end{cases}$$

$$(\text{٧,٩}) \quad \begin{cases} -2\,\lambda\ \mathbf{S} = 0 \\ \text{أو} \\ \lambda_i\ S_i^2 = 0 \\ \text{أو} \\ \lambda_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_{ij} - b_i = 0 \right. \quad , \quad i = 1\,,2\,,\dots,m \end{cases}$$

$$(\text{٧,١٠}) \quad \begin{cases} -2\ \mu\ \mathbf{r} = 0 \\ \text{أو} \\ \mu_j\ .\ x_j = 0 \qquad j = 1\,,2\,,\dots,n \end{cases}$$

$$(\text{٧,١١}) \quad \begin{cases} A\,\mathbf{X} + \mathbf{S}^2 - \mathbf{b} = 0 \\ \text{أو} \\ A\,\mathbf{X} \le \mathbf{b} \\ \text{أو} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j \le b_i \qquad i = 1\,,2\,,\dots,m \end{cases}$$

$$(٧, ١٢) \quad \begin{cases} -\mathbf{X} + \mathbf{r}^2 = 0 \\ \text{أو} \\ \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \\ \text{أو} \\ x_j \geq 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

$$(٧, ١٣) \qquad \lambda_i , \mu_j , x_j , s_i , r_j \geq 0$$

الشـروط السـابقـة باسـتثناء (٧, ٩) و (٧, ١٠) شـروط برمـجـة خطيـة تحتـوي على 2(n+m) من المتغـيرات . يؤدي كل من الشرطين $\lambda_i s_i = 0$, $\mu_j x_j = 0$ لجميع قيم j , i إلى أنه لا يمكن لكل من x_j , μ_i , λ_i , s_i أن تكون متغيرات أساسية في حالة الحلول غير المتحللة (non-degenerate) أو المتكررة الأساسيـة . وتسمى الشروط $\mu_j x_j = 0$ و $\lambda_i s_i = 0$ بالشروط المكملة أو الإضافية (complementary) .

مثال (٧, ١)

أوجد أصغر قيمة للدالة :

$$f = -4x_1 + x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

تحت القيود :

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 - 4x_2 \leq 0$$

$$x_1 \geq 0 , \; x_2 \geq 0$$

الحل

بإدخال المتغيرات الإضافية $y_1 = s_1^2$, $y_2 = s_2^2$, $\mu_1 = r_1^2$, $\mu_2 = r_2^2$،

يمكن إعادة صياغة المسألة فتكون عبارة عن تصغير الدالة **f** التالية :

$$\mathbf{f} = (-4 \quad 0)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} \\ -x_1 + \mu_1 = 0 \\ -x_2 + \mu_2 = 0 \end{array}\right. \qquad (٧,١٤)$$

بمقارنة هذه المسألة بصياغة المعادلات من (٧,٤) إلى (٧,٦) نجد أن

$$c_1 = -4 \;,\; c_2 = 0$$

$$b = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} \text{،} D = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \text{و}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \text{ و } A_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

ومن ذلك يمكن الحصول على الشروط الضرورية لحل المسألة المذكورة في المعادلة (٧,٨) باستخدام المعادلات من (٧,٨) إلى (٧,١٣) هي :

$$\left\{\begin{array}{lr} -4 - \mu_1 + 2x_1 - 2x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ 0 - \mu_2 - 2x_1 + 4x_2 + \lambda_1 - 4\lambda_2 & = 0 \\ 2x_1 + x_2 \qquad - 6 & = -y_1 \\ x_1 - 4x_2 \qquad - 0 & = -y_1 \end{array}\right. \qquad (٧,١٥)$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \\ y_1 \geq 0 \ , \ y_2 \geq 0 \\ \lambda_1 \geq 0 \ , \ \lambda_2 \geq 0 \\ \mu_1 \geq 0 \ , \ \mu_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (٧ , ١٦)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 \ y_1 = 0 \ , \ \mu_1 x_1 = 0 \\ \lambda_2 \ y_2 = 0 \ , \ \mu_2 x_2 = 0 \end{cases} \qquad (٧ , ١٧)$$

لاحظ أنه إذا كانت y_i في الأساس، فإنه لا يمكن أن تكون λ_i في الأساس، وإذا كانت x_i في الأساس، فإنه لا يمكن أن تكون μ_j في الأساس. يمكن كتابة مجموعة المعادلات (١٥ , ٧) كما يلي:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 + Z_1 = 4 \\ -2x_1 + 4x_2 + \lambda_1 - 4\lambda_2 - \mu_2 + Z_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + y_1 = 6 \\ x_1 - 4x_2 + y_2 = 0 \end{cases} \qquad (٧ , ١٨)$$

حيث Z_1 , Z_2 متغيرات اصطناعية (artificial) لإيجاد الحل الذي يحقق القيود للمعادلات من (١٥ , ٧)(إلى المعادلات (١٧ , ٧) تستخدم المرحلة الأولى (Phase I) من طريقة السمبلكس؛ حيث نصغر $W = Z_1 + Z_2$ تحت القيود المذكورة في المعادلات (١٦ , ٧) إلى (١٨ , ٧) . كما في الجدول رقم (١ , ٧) جدول السمبلكس المبدئي التالي:

الجدول رقم (١ , ٧).

المتغير الداخل — الأكثر سالبية

المتغيرات الأساسية	W	المتغيرات										الحل	النسبة
		x_1	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	y_1	y_2	z_1	z_2		
$-W$	0	0	-2	-3	3	1	1	0	0	0	0	-4	
y_1	0	2	1	0	0	0	0	1	0	0	0	6	6
y_2	0	1	-4	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
z_1	0	2	-2	2	1	-1	0	0	0	1	0	4	
z_2	0	-2	[4]	1	-4	0	-1	0	0	0	1	0	0

تبعاً لطريقة السمبلكس تدخل λ_1 الأساس في التكرار التالي ؛ لأن معامل التكلفة لهذا المتغير هو الأكثر سالبية ، وتكون Z_2 المتغير الداخل لأن النسبة المناظرة لها هي الأصغر ولكن λ_1 لا يمكن أن تدخل الأساس لأن y_1 بالأساس (لكي تحقق المعادلات (٧ , ١٧)) ، ولذلك نختار x_2 لكي تدخل الأساس في التكرار التالي ، وطبقاً لهذا الاختيار فإن Z_2 سوف تترك الأساس والجدول رقم (٧ , ٢) يوضح ناتج التكرار الأول من جدولة السمبلكس .

نلاحظ في الجدول رقم (٢ , ٧) أن λ_1 تدخل الأساس في التكرار التالي ، وأن y_2 أو x_2 تخرج من الأساس ، وهذا غير ممكن لأن y_1 من المتغيرات الأساسية

(حتى تحقق متطلبات المعادلات (٧,١٧)). لذا نختار x_1 لكي تدخل الأساس، وبالتالي يكون y_1 هو المتغير الخارج. الجدول رقم (٧,٣) يوضح نتيجة التكرار الثاني من جدولة السمبلكس.

الجدول رقم (٧,٢).

المتغير الداخل
الأكثر سالبية

المتغيرات الأساسية	W	المتغيرات x_1	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	y_1	y_2	z_1	z_2	الحل	النسبة
- W	0	-1	0	-3/2	1	1	1/2	0	0	0	1/2	-4	
y_1	0	5/2	0	-1/4	1	0	1/4	1	0	0	-1/4	6	12/5
y_2	0	-1	0	1	-4	0	-1	0	1	0	1	0	
z_1	0	1	0	3/2	-1	-1	-1/2	0	0	1	1/2	4	4
z_2	0	-1/2	1	1/4	-1	0	-1/4	0	0	0	1/4	0	

العنصر المحوري

في هذه المرحلة نجد أن λ_1 تدخل الأساس (يمكن السماح بذلك لأن y_1 ليست في الأساس) و Z_1 تترك الأساس. يوضح الجدول رقم (٧,٣) نتيجة التكرار الثالث.

الجدول رقم (٧,٣).

		المتغيرات							المتغيرات				
الأساسية	W	x_1	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	y_1	y_2	z_1	z_2	الحل	النسبة
-W	0	0	0	-13/5	7/5	1	3/5	2/5	0	0	2/5	-8/5	
x_1	0	1	0	-1/10	2/5	0	1/10	2.5	0	0	-1/10	12/5	
y_2	0	0	0	9/10	-18/5	0	-9/10	2/5	1	0	9/10	12/15	8/3
z_1	0	0	0	13/5	-7/5	-1	-3/5	-2/5	0	1	3/5	8/5	8/13
x_2	0	0	1	1/5	-4/5	0	-1/5	1/5	0	0	1/5	6/5	6

الجدول رقم (٧,٤).

	المتغيرات								المتغيرات				
الأساسية	W	x_1	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	y_1	y_2	z_1	z_2	الحل	النسبة
-W	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
x_1	0	1	0	0	9/26	-1/26	1/13	5/13	0	1/26	-1/13	32/13	
y_2	0	0	0	0	-81/26	9/26	-9/13	7/13	1	-9/26	9/13	24/13	
λ_1	0	0	0	1	-7/13	-5/13	-3/13	-2/13	0	5/13	3/13	8/13	
x_2	0	0	1	0	-9/13	1/13	-2/13	3/13	0	-1/13	2/13	14/13	

حيث إن المتغيرات الصناعية Z_1 و Z_2 قد حذفت من الأساس.

يعطي الجدول (٧,٤) الحل المطلوب وتكون قيم المتغيرات الأساسية هي $x_1 = \frac{32}{13}$, $x_2 = \frac{14}{13}$, $y_2 = \frac{24}{13}$, $\lambda_1 = \frac{8}{13}$. وقيم المتغيرات غير الأساسية هي $\lambda_2 = y_1 = \mu_1 = \mu_2 = 0$. وبالتالي فإن حل مسألة البرمجة التربيعية المعطاة هو:

$$x_1^* = \frac{32}{13}, \quad x_2^* = \frac{14}{13}, \quad f_{min} = f\left(x_1^*, x_2^*\right) = \frac{-88}{13}$$

بعد إيجاد الشروط الضرورية الخاصة بمسائل البرمجة التربيعية، وحل المسألة

الموضحة بالمثال (١ , ٧) أصبح من الممكن توضيح تعديل وولف لطريقة السمبلكس حتى تستخدم في حل مسائل البرمجة التربيعية .

تعديل وولف لطريقة السمبلكس

يمكن تلخيص طريقة وولف لحل مسائل البرمجة التربيعية في الخطوات التالية :

خطوة (١)

ندخل متغيرات اصطناعية $Z_j \ , \ j = 1, 2, \ldots, n$ في شرط كون–توكر المعطى بالمعادلة (٧,٨) ، فنحصل على :

$$C_j - \sum_{k=1}^{n} x_k d_{jk} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} + \mu_j + Z_j = 0 \qquad (٧,٩)$$

سوف نستخدم $x_j = 0 \ , \ \mu_j = 0 \ , \ Z_j = -C_j \ , \ S_i^2 = b_i$ كأساس بدء مقبول . بينما لأي مسألة حقيقية يكون هذا الحل مرغوباً فيه إذا ، وإذا فقط ، كان $Z_j = 0 \ , \ j = 1, 2, \ldots, n$.

خطوة (٢)

ننفذ الطور I لطريقة السمبلكس حتى نتأكد فيما إذا كانت الشروط $\mathbf{Ax \leq b}$ محققة له أم لا ، فإن لم نجد حلاً مقبولاً نوقف خطوات الحل ، وإلا نوجد حلا أساسيا مقبولا للطور II .

للحصول على الحل المرغوب الذي يحقق الشروط لحل المسألة التالية ، وهي تصغير قيمة الدالة :

$$f = \sum_{j=1}^{n} Z_j$$

تحت القيود :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k\, d_{jk} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, a_{ij} - \mu_j + Z_j = - C_j \ , \ j = 1 , 2 , \dots , n$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j + S_i^2 = b_i \ , \ i = 1 , 2 , \dots , m$$

$$\lambda_i \ , x_j \ , \mu_j \ , s_i \ , Z_j \geq 0 \quad i , j$$ لكل قيم

شروط مرنة مكملة :

$$\begin{cases} \lambda_i \, . \, s_i = 0 \\ \mu_j \, . \, x_j = 0 \end{cases}$$

نستخدم في تحديد المتغير الدالي الذي يدخل الأساس j.

خطوة (٣)

نفذ الطور الثاني لطريقة السمبلكس حتى تحصل على الحل الأمثل للمسألة في خطوة (٢). سوف يكون الحل الذي حصلنا عليه حلا أمثل لمسألة البرنامج التربيعي.

مثال (٧,٢)

استخدم طريقة وولف لمسألة البرنامج التربيعي في إيجاد أكبر قيمة للدالة

$$\mathbf{f} = 2x_1 + x_2 - x_1^2$$

تحت القيود:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$2x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 \ , \ x_2 \geq 0$$

الحـل

اعتبر شروط عدم السالبية $x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0$ متساويات، ثم أضف متغيرات مرنة إلى كل المتراجحات لتصبح كمتساويات أو معادلات:

$$2x_1 + 3x_2 + s_1^2 = 6$$
$$2x_1 + x_2 + s_2^2 = 4$$
$$-x_1 + r_1^2 = 0$$
$$-x_2 + r_2^2 = 0$$

نشتق دالة لاجرانج كما يلي:

$$L(x_1, x_2, s_1, s_2, \lambda_1, \lambda_2, r_1, r_2, \mu_1, \mu_2) = (2x_1 + x_2 - x_1^2) - \lambda_1(2x_1 + 3x_2 + s_1^2 - 6) - \lambda_2(2x_1 + x_2 + s_2^2 - 4) - \mu_1(-x_1 + r_1^2) - \mu_2(-x_2 + r_2^2)$$ ،

الشروط الضرورية الكافية لتكبير دالة لاجرانج وبالتالي الدالة f هي:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2 - 2x_1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \mu_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 - 3\lambda_1 - \lambda_2 + \mu_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_1} = -2\lambda_1 s_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_2} = -2\lambda_2 s_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial r_1} = -2\mu_1 r_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial r_2} = -2\mu_2 r_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 2x_1 + 3x_2 + s_1^2 - 6 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 2x_1 + x_2 + s_2^2 - 4 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_1} = -x_1 + r_1^2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_2} = -x_2 + r_2^2 = 0$$

بتبسيط هذه الشروط نحصل على :

$$2x_1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - \mu_1 = 2$$

$$3\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_2 = 1$$

$$2x_1 + 3x_2 + s_1^2 = 6$$

$$2x_1 + x_2 + s_2^2 = 4$$

$$\lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_2 = 0$$

$$\mu_1 r_1 = \mu_2 r_2 = 0$$

حيث $x_1 , x_2 , \lambda_1 , \lambda_2 , \mu_1 , \mu_2 , r_1 , r_2 , s_1 , s_2 \geq 0$

وبإدخال متغيرات اصطناعية Z_1 و Z_2 في الشرط الأول والثاني على الترتيب، فتصبح الطريقة المعدلة كالتالي :

أوجد أصغر قيمة للدالة :

$$f^* = Z_1 + Z_2$$

تحت القيود:

$$2x_1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - \mu_1 + Z_1 = 2$$

$$3\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_2 + Z_2 = 1$$

$$2x_1 + 3x_2 + s_1^2 = 6$$

$$2x_1 + x_2 + s_2^2 = 4$$

$$x_1 , x_2 , s_1 , s_2 , Z_1 . Z_2 , \mu_1 , \mu_2 \geq 0$$

و:

$$\lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_2 = 0$$

$$\mu_1 r_1 = \mu_2 r_2 = 0$$

وبإدخال متغيرات اصطناعية Z_1 و Z_2 في الشرط الأول والثاني على الترتيب، فتصبح الطريقة المعدلة كالتالي:

أوجد أصغر قيمة للدالة

$$f^* = Z_1 + Z_2$$

تحت القيود:

$$2x_1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - \mu_1 + Z_1 = 2$$

$$3\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_2 + Z_2 = 1$$

$$2x_1 + 3x_2 + s_1^2 = 6$$

$$2x_1 + x_2 + s_2^2 = 4$$

و:

$$\lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_2 = 0$$

$$\mu_1 r_1 = \mu_2 r_2 = 0$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, Z_1, Z_2, \mu_1, \mu_2 \geq 0$$

سوف نستخدم طريقة M الكبيرة لإيجاد الحل الأساسي لهذه المسألة الخطية بضرب مقدار كبير $M > 0$ في معامل المتغيرات الاصطناعية في دالة الهدف، فتصبح المسألة كما يلي:

صغر الدالة:

$$f^* = Mz_1 + Mz_2$$

تحت القيود:

$$2x_1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - \mu_1 + Z_1 = 2$$

$$3\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_2 + Z_2 = 1$$

$$2x_1 + 3x_2 + s_1^2 = 6$$

$$2x_1 + x_2 + s_2^2 = 4$$

$$x_1 , x_2 , s_1 , s_2 , Z_1 , Z_2 , \mu_1 , \mu_2 \geq 0$$

و:

$$\lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_2 = 0$$

$$\mu_1 r_1 = \mu_2 r_2 = 0$$

وبالتعويض عن Z_1 و Z_2 في دالة الهدف نحصل على

$$f^* = 3M - 2Mx_1 - 5M\lambda_1 - 3M\lambda_2 + M\mu_1 + M\mu_2$$

في الجدول رقم (٥ , ٧) نوضح الحل الأساسي المبدئي لمسألة البرمجة الخطية.

الجدول رقم (٥ , ٧).

الأساس	x_1	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	s_1	s_2	z_1	z_2	الحل	النسبة
f	-2M	0	-5M	-3M	M	M	0	0	0	0	3M	
z_1	2	0	2	2	-1	0	0	0	1	0	2	1
z_2	0	0	3	1	0	-1	0	0	0	1	1	
s_1	2	3	0	0	0	0	1	0	0	0	6	3
s_2	2	1	0	0	0	0	0	1	0	0	4	2

الجدول رقم (٦,٧).

الأساس	x_1	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	s_1	s_2	z_2	الحل	النسبة
f	0	0	-3M	M	0	M	0	0	0	M	
x_1	1	0	1	1	1/2	0	0	0	0	1	
z_2	0	0	3	1	0	-1	0	0	1	1	
s_1	0	3	-2	-2	1	0	1	0	0	4	4/3
s_2	0	1	-2	-2	1	0	0	1	0	2	2

الجدول رقم (٧,٧).

الأساس	x_1	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	s_1	s_2	z_2	الحل	النسبة
f	0	0	-3M	-M	0	M	0	0	M	M	
x_1	1	0	1	1	1/2	0	0	0	0	1	1
z_2	0	0	3	1	0	-1	0	0	1	1	1/3
x_2	0	1	-2/3	-2/3	1/3	0	1/3	0	0	4/3	
s_2	0	0	-4/3	-4/3	2/3	0	-1/3	1	0	2/3	

الجدول رقم (٨,٧).

الأساس	x_1	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	s_1	s_2	الحل	النسبة
f	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
x_1	1	0	0	2/3	-1/2	1/3	0	0	2/3	
λ_1	0	0	1	1/3	0	-1/3	0	0	1/3	
x_2	0	1	0	-4/9	1/3	-2/9	1/3	1/3	14/9	
s_2	0	0	0	-8/9	-1/3	-4/9	-1/3	-1/3	10/9	

بالجدول رقم (٧ , ٥) أكبر قيمة سالبة هي 5M - ولكن لا يمكن أن ندخل λ_1 (أو λ_2) في الأساس بسبب الشروط المكملة $\lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_2 = 0$. حيث إن $\mu_1 = 0$ ، لذا فإن x_1 يمكن أن تدخل الأساس ويخرج من الأساس Z_1. الحل الجديد موضح بالجدول رقم (٧ , ٦). أيضاً في هذا التكرار لا يمكن إدخال λ_1 و λ_2 و μ_1 في الأساس في جدول (٧ , ٦) وذلك لأن s_1 و s_2 و x_1 على الترتيب تقع في الأساس. لذا تدخل x_2 في الأساس ويخرج s_1. الحل الجديد موضح بالجدول (٧ , ٧).

حيث إن $s_1 = 0$ لذا فإنه من الممكن أن تدخل λ_1 في الأساس في الجدول رقم (٧ , ٧) ويخرج المتغير Z_2. الحل الجديد موضح بالجدول رقم (٧ , ٨).

لا يوجد في الجدول رقم (٧ , ٨) متغير غير أساسي يحسّن دالة الهدف، ويكون الحل الأمثل هو:

$$x_1 = \frac{3}{2}\ , x_2 = \frac{14}{9}\ , \lambda_1 = \frac{1}{3}\ , \lambda_2 = 0$$

$$\mu_1 = \mu_2 = 0\ , s_1 = 0\ , s_2 = \frac{10}{9}$$

يحقق هذا الحل كذلك الشروط المرنة المتممة:

$$\lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_2 = 0$$

$$\mu_1 x_1 = \mu_2 x_2 = 0$$

ويكون القيد على إشارة مضاريب لاجرانج λ_1 و λ_2 و μ_1 و μ_2.

القيمة الكبرى لدالة الهدف للبرنامج التربيعي المعطى هي:

$$\text{Max.f} = 2x_1 + x_2 - x_1^2 = 2\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{14}{9} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{22}{9}$$

(٧,٣) طريقة بيـل

نستخدم في هذه الطريقة طرقاً تعتمد على حساب التفاضل والتكامل بدلاً من شروط كون–توكر لحل مسألة برنامج تربيعي من الصيغة التالية :
أوجد أصغر قيمة للدالة :

$$f = C\mathbf{X} + \frac{1}{2}\mathbf{X}^T D\mathbf{X} \qquad (٧,١٩)$$

تحت القيود :

$$A\mathbf{X} = \mathbf{b} \qquad (٧,٢٠)$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0} \qquad (٧,٢١)$$

حيث $\mathbf{X} \in E^n$ و $\mathbf{b} \in E^m$ و $C \in E^n$ و D مصفوفة متماثلة من الرتبة n و A مصفوفة ذات أبعاد m x n .

تبدأ طريقة بيـل (Beale) بتجزيء المتغيرات في مسألة البرنامج التربيعي، وعددها n ، إلى متغيرات أساسية وأخرى غير أساسية في كل تكرار لعمليات الحل . حيث يتم التعبير عن المتغيرات الأساسية وكذلك دالة الهدف بدلالة المتغيرات غير الأساسية .

لتكن B مصفوفة غير شاذة من الرتبة m التي تحتوي على أعمدة من A مناظرة للمتغيرات الأساسية $\mathbf{X}_N \in E^{n-m}$، ولتكن N مصفوفة لها بعد m x (n-m) وتحتوي على أعمدة مناظرة للمتغيرات غير الأساسية $X_N \in E^{n-m}$ ، وبالتالي يمكن كتابة المعادلة (٧,٢٠) كالتالي :

$$(B, N)(\mathbf{X_B}, \mathbf{X}_N)^T = \mathbf{b}$$

أو

$$\mathbf{X}_B = B^{-1}\,\mathrm{b} - B^{-1} N\,\mathbf{X}_N$$

أو:

$$X_{B_i} = y_{i0} - \sum_{j=1}^{n-m} y_{ij} X_{N_j} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \qquad (٧,٢٢)$$

حيث:

$$y_{i0} = (y_{10}, y_{20}, \dots, y_{m0})^T = B^{-1} b \quad , \quad y_{ij} = B^{-1} N$$

$$X_{N_j} = 0 \ \ (j = 1, 2, \dots, n-m)$$

فإن:

$$X_{B_i} = y_{i0} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m$$

يمكن كتابة دالة الهدف (٧,١٩) بدلالة الحدود $\mathbf{X}_N$, $\mathbf{X}_B$ كما في الصيغة التالية:

$$f = (\mathbf{C_B}, \mathbf{C_N})(\mathbf{X_B}, \mathbf{X_N}) + \frac{1}{2}(\mathbf{X}_B^T, \mathbf{X}_N^T)\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}(\mathbf{X_B}, \mathbf{X_N})$$

بالتعبير عن f بدلالة المتغيرات $\mathbf{X}_N$ غير الأساسية (n - m) المتبقية، وبعد التبسيط نحصل على:

$$f = f^0 + \alpha \mathbf{X}_N + \mathbf{X}_N^T G \mathbf{X}_N \qquad (٧,٢٣)$$

حيث:

f_0 = قيمة الدالة f عند $\mathbf{X}_N = 0$ و $\mathbf{X}_{B_i} = y_{i0}$

$\mathbf{G}$ = مصفوفة متماثلة من رتبة $(n - m) \times (n - m)$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-m})$ متجه ثوابت.

ولاستخدام طريقة بيل نتبع الخطوات التالية:

خطوة (١)

نحسب المشتقات الجزئية للدالة f بالنسبة إلى المتغيرات غير الأساسية $\mathbf{X}_{N_j} = 0 \quad , \quad j = 1, \dots, n-m$ وذلك من المعادلة (٧,٢٣) نحصل على

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{X}_{N_j}} = \alpha_j + 2 \sum_{k=1}^{n-m} g_{jk} \mathbf{X}_{N_k} \quad ; \; j = 1, 2, \ldots, n-m \qquad (٧,٢٤)$$

خطوة (٢)

نحسب :

$$\alpha_j = \left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_{N_k}}\right|_{\mathbf{X}_N = 0} \quad ; \; j = 1, 2, \ldots, n-m$$

حيث تمثل α_j التحسن الذي سيطرأ على دالة الهدف عندما تزيد قيمة المتغير غير الأساسي رقم j، لذلك :

أ) إذا كان $\alpha_j < 0$ لكل قيم j عندئذ كان الحل الجاري حلاً أمثل.

ب) لكن إذا كانت $\alpha_j > 0$ لبعض قيم j كان هذا يعني أنه بالإمكان تحسين قيمة دالة الهدف بإدخال متغير غير أساسي إلى الأساس. وللتعجيل بعملية الوصول إلى الحل الأمثل، يجب إدخال المتغير غير الأساسي صاحب أكبر تحسين ممكن، أي المتغير x_r صاحب

$$\alpha_r = \max_{j} \left.\frac{\partial f}{\partial x_N}\right|_{x_N = 0}$$

وعندما نبدأ في زيادة قيمة المتغير x_{N_r} تبدأ قيم المتغيرات الأساسية في التغير وفقاً للمعادلة (٧,٢٢). أيضاً تغيرقيم $\frac{\partial f}{\partial x_{N_r}}$ تتغير مع x_{N_r} ويمكن أن تصل هذه القيمة إلى الصفر خلال عملية تحويل الحل إلى حل جديد بينما لا تزال قيم المتغيرات الأساسية موجبة. وإذا حدث ذلك نكون قد زدنا قيمة دالة الهدف سوءاً بدلاً من تحسينها؛ لذلك نتبع الخطوة (٣) كالتالي :

خطوة (٣)

نحدد r التي تمثل دليل المتغير غير الأساسي صاحب أكبر قيمة من قيم α_j الموجبة. ثم نزيد من قيمة المتغير غير الأساسي x_r إلى قيمة تحقق المتطلبين التاليتين:

(أ) أن يتناقص أي متغير في الأساس الحالي إلى الصفر.

(ب) أن تنعدم المشتقة الجزئية $\frac{\partial f}{\partial x_{N_r}}$.

أيهما أسرع.

خطوة (٤)

وفقاً للشرط (i) في الخطوة (٣) نختار قيمة المتغير غير الأساسي x_r، ونرمز لها بالرمز B_1 حيث:

$$B_1 = \min \begin{cases} \frac{y_{i0}}{y_{ir}} & ; \; y_{ir} > 0 \\ \infty & ; \; y_{ir} \le 0 \end{cases} \quad , r = 1, 2, ..., n - m \qquad (٧, ٢٥)$$

كما نحسب القيمة الحرجة B_2 للمتغير x_r التي تجعل $\frac{\partial f}{\partial x_{N_r}}$ صفراً من العلاقة:

$$B_2 = \begin{cases} -\frac{a_r}{2 g_{rr}} & ; \; g_{rr} > 0 , \\ \infty & ; \; g_{rr} \le 0 \end{cases}$$

ومن ثم نختار قيمة المتغير غير الأساسي x_r وفقاً للمعادلة:

$$x_r = \min \{ B_1 , B_2 \}$$

إذا كانت كل من $B_1 = \infty$ و $B_2 = \infty$، كان حل مسألة البرمجة التربيعية غير محدد.

(أ) إذا تقرر زيادة المتغير الداخل x_r إلى B_1 فقط، سيصل متغير أساسي

واحد إلى الصفر، وعندئذ يمكن الحصول على حل أساسي وحيد جديد، ممكن باستخدام طريقة السمبلكس. لكن إذا أدت زيادة x_r إلى B_1 إلى انعدام قيمة أكثر من متغير أساسي واحد كان الحل الذي سنحصل عليه منحلاً (degenerate).

(ب) إذا تقرر زيادة المتغير الداخل x_r إلى B_2 فإن هذا يعني أن جميع متغيرات الأساس لا تزال موجبة. هنا نعرف متغيراً جديداً (غير مقيد) u_r كما يلي:

$$u_r = \frac{\partial f}{\partial x_r} = \alpha_r + 2 \sum_{k=1}^{n-m} g_{rk}\, x_{N_k}$$

ويسمى المتغير u_r يسمى أيضاً متغيرا حرا. ويصبح لدينا m+1 متغير غير صفري و m+1 قيداً (لأن المتغير u_r ذاته أضاف قيداً هو المحدد بالمعادلة التي تعّرفه). هذه المتغيرات تكون حلاً أساسياً ممكناً لهذه الفئة الجديدة من القيود:

$$A\mathbf{X} = \mathbf{b}$$

$$u_r - 2 \sum_{k=1}^{n-m} g_{rk}\, x_{N_k} = \alpha_r$$

لاحظ أن المتغير u_r أضيف إلى فئة الشروط بغرض الحسابات، وقيمته تساوي الصفر في الحل الأساسي المقبول التالي. كما أننا تعاملنا مع المتغيرات $\mathbf{X}_B$ و u_r وكأنها متغيرات أساسية. نعبر عن الفئة الجديدة للقيود بدلالة المتغيرات غير الأساسية حتى نحصل على حل أساسي جديد ومقبول.

خطوة (٥)

نعود إلى الخطوة (١) ثم ننفذ إجراءات الحصول على حل أساسي جديد ومقبول كامل، ونكرر هذه الإجراءات حتى لا يمكن تحسين قيمة دالة الهدف الذي يمكن الحصول عليه بالسماح بتغيير أحد المتغيرات غير الأساسية. وتشمل التغيرات المسموح بها هنا زيادة كل المتغيرات وإنقاص المتغير الحر، وبعبارة أخرى فإن الإجراءات تتوقف عندما:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_{N_j}} = \begin{cases} \leq 0 \,, & \text{إذا كانت } \mathbf{X}_{N_j} \text{ متغير مقيد (غير سالب)} \\ = 0 \,, & \text{إذا كان } \mathbf{X}_{N_j} \text{ متغير حر} \end{cases} \qquad (٧,٢٦)$$

الشرط الضروري (٧,٢٦) لإيقاف الإجراءات هو أيضاً شرط كاف للحصول على القيمة الصغرى الشاملة، إذا كانت D نصف مؤكدة الإيجاب أو موجبة مؤكدة.

نورد الآن الملاحظتين التاليتين:

ملاحظة (أ): أثناء حساب $\frac{\partial f}{\partial u_r}$ يجب اختبار الزيادة والنقص حيث إن u_r غير مقيدة.

ملاحظة (ب): إذا حدث في أي تكرار أن أخذ المتغير الحر الأساسي لقيمة غير صفرية، فإن القيد الذي يحتويه يجب أن يسقط. وهذا يرجع إلى حقيقة أنه متغير حر ولا يمكن اختياره ليترك الأساس أو يُختار ضمن المتغيرات المختارة لكي تترك.

مثال (٧,٢)

باستخدام طريقة بيل، حل مسألة البرمجة التربيعية التالية:

أوجد أكبر قيمة للدالة

$$f = 2x_1 + 3x_2 - 2x_2^2$$

تحت القيود:

$$x_1 + 4x_2 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 \ , \ x_2 \geq 0$$

الحل

بعد إدخال متغيرات متممة s_1 و s_2 يمكن كتابة القيود المعطاة كالتالي:

$$x_1 + 4x_2 + s_1 = 4$$

$$x_1 + x_2 + s_2 = 2$$

$$x_1 , x_2 , s_1 , s_2 \geq 0$$

الآن نختار الآتي كحل أساسي مبدئي ومقبول

$$x_1 = x_2 = 0 \ , \ s_1 = 4 , s_2 = 2$$

والذي نعبر عنه في الجدول رقم (٩ , ٧).

الجدول رقم (٩ , ٧).

المتغيرات في الأساس	المتغيرات				قيم الحل
	x_1	x_2	s_1	s_2	
s_1	1	4	1	0	4
s_2	1	1	0	1	2

القيمة المبدئية لدالة الهدف هي $f_0 = 0$. كما أن $\mathbf{X}_B = (s_1 , s_2) = (4 , 2)$

و $\mathbf{X}_N = (x_1 , x_2) = (0 , 0)$.

بالتعبير عن f بدلالة المتغيرات غير الأساسية x_1 , x_2 نحصل على:

$$f = 2x_1 + 3x_2 - 2x_2^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 3 - 4x_2$$

عند الحل الجاري الأساسي نحسب المشتقات الجزئية للدالة f بالنسبة إلى $x_1 = x_2 = 0$ أي أن:

$$\alpha_1 = \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\substack{x_1 = 0 \\ x_2 = 0}} = 2 \quad , \quad \alpha_2 = \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{\substack{x_1 = 0 \\ x_2 = 0}} = 3$$

لذا يمكن اختيار x_2 (لأن α_2 هي القيمة الأكثر إيجابية) لتدخل الأساس لتحسين قيمة دالة الهدف. باستخدام الجدول رقم (٣-١) القيمة الحرجة $B_1 = x_2^{(1)}$ من x_2 المعطاة كالتالي:

$$x_2^{(1)} \ (=B_1) = \min\left\{\frac{4}{4} , \frac{2}{1}\right\} = 1$$

أيضاً:

$$x_2^{(2)} \ (= B_2) = \frac{|-\alpha_2|}{2g_{22}} = \frac{|-3|}{-2\,(2)} = \frac{3}{4}$$

وبالتالي فالقيمة الجديدة للمتغير الداخل تعطى كالتالي:

$$x_2 = \min\{B_1 , B_2\} = \min\left\{1 , \frac{3}{4}\right\} = \frac{3}{4}$$

القيمة x_2 مناظرة لـ B_2 ولهذا تطبق الحالة (ب) وبالتالي لا يوجد أحد المتغيرات الأساسية الجارية يأخذ قيمة صفرية. بالتتابع ندخل متغيرا حرا u_1 وشرطا جديدا:

$$u_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 3 - 4x_2$$

أو :

$$4x_2 + u_2 = 3$$

كما هو موضح بالجدول رقم (١٠, ٧).

ونلاحظ هنا أن $\mathbf{X}_B = (s_1\ , s_2\ , u_2)$ و $\mathbf{X}_N = (x_1\ , x_2)$.

الجدول رقم (١٠, ٧).

المتغيرات في الأساس	المتغيرات					قيم الحل	النسبة
	x_1	x_2	s_1	s_2	u_2		
s_1	1	4	1	0	0	4	1
s_2	1	1	0	1	0	2	2
u_1	0	[4]	0	0	1	3	3/4

والآن ندخل x_2 إلى الأساس ونخرج u_2 في الجدول (١٠, ٧). الحل الجديد موضح بالجدول (١١, ٧) .

الجدول رقم (١١ , ٧) .

المتغيرات في الأساس	المتغيرات					قيم الحل
	x_1	x_2	s_1	s_2	u_2	
s_1	1	0	1	0	1	1
s_2	1	0	0	1	1/4	5/4
x_2	0	1	0	0	-1/4	3/4

بحـذف المتـغيـر الأسـاسي x_2 من دالة الهـدف والتـعبيـر عنه بدلالة x_1 و u_2 نحصل على :

$$f = 2x_1 + 3\left(\frac{3}{4} - \frac{u_1}{4}\right) - 2\left(\frac{3}{4} - \frac{u_1}{4}\right)^2$$

مرة ثانية ، نحسب المشتقات الجزئية للدالة f بالنسبة إلى x_1 و u_1 :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = -\frac{u_1}{4}$$

في الحل الجاري نحصل على :

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\substack{x_1 = 0 \\ u_2 = 0}} = 2 \quad , \quad \left.\frac{\partial f}{\partial u_2}\right|_{\substack{x_1 = 0 \\ u_1 = 0}} = 0$$

أي أن شرط التوقف لطريقة بيـل قد تحقق ، وبذلك يكون الحل الأمثل هو :

$$x_1^* = 0 \quad , \quad x_2^* = \frac{3}{4}$$

وأكبر قيمة للدالة هي:

$$f^* = \frac{9}{8}$$

(٤,٧) تمارين

١- باستخدام البرمجة التربيعية أوجد الآتي:

(أ) أكبر قيمة للدالة:

$$f(\mathbf{x}) = 5x_1 + 8x_2 + x_1x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$$

تحت القيود:

$$0 \le x_1 \le 4$$

$$0 \le x_2 \le 5$$

$$x_1 + 2x_2 \le 10$$

(ب) أصغر قيمة للدالة:

$$f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

تحت القيود:

$$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \ge 0$$

$$3x_1 \qquad + 5x_3 \le 15$$

$$x_i \ge 0 \quad , \quad i = 1 , 2 , 3$$

(جـ) أكبر قيمة للدالة:

$$f(\mathbf{x}) = 2x_1 + 3x_2 - 2x_1^2$$

تحت القيود:

$$x_1 + 4x_2 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 \;,\; x_2 \geq 0$$

(د) أكبر قيمة للدالة:

$$f(\mathbf{x}) = 10x_1 + 25x_2 - 10x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_2$$

تحت القيود:

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1 + x_2 \leq 9$$

$$x_1 \;,\; x_2 \geq 0$$

٢- باستخدام طريقة وولف أوجد الآتي:

(أ) أصغر قيمة للدالة:

$$f(\mathbf{x}) = 6 - 6x_1 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2$$

تحت القيود:

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 \;,\; x_2 \geq 0$$

(ب) أكبر قيمة للدالة:

$$f(\mathbf{x}) = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2$$

تحت القيود:

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$x_1 \;,\; x_2 \geq 0$$

٣- باستخدام طريقة بيـل أوجد الآتي :

(أ) أصغر قيمة للدالة :

$$f(\mathbf{x}) = -4x_1 + x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

تحت القيود :

$$2x_1 + x_2 \geq 6$$
$$x_1 - 4x_2 \geq 0$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

(ب) أكبر قيمة للدالة :

$$f(\mathbf{x}) = 4x_1 + 6x_2 - x_1^2 - 3x_2^2$$

تحت القيود :

$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 \;,\; x_2 \geq 0$$

(جـ) أصغر قيمة للدالة :

$$f(\mathbf{x}) = 6 - 6x_1 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

تحت القيود :

$$x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 \;,\; x_2 \geq 0$$

٤- أوجد أكبر قيمة للدالة :

$$f(\mathbf{x}) = 18x_1 - x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$$

تحت القيود :

$$x_1 + x_2 \le 12$$
$$-x_1 + x_2 \le 6$$
$$-x_1 \le 0$$
$$-x_2 \le 0$$

٥- أوجد أكبر قيمة للدالة :

$$f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$$

تحت القيود :

$$2x_1 - 2x_2 \le -1$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 0$$
$$x_1 \le 1$$

٦- أوجد أكبر قيمة للدالة :

$$f(\mathbf{x}) = -x_1^2 + x_1x_2 - 2x_2^2 + x_1 + x_2$$

تحت القيود :

$$x_1 - x_2 \ge 3$$
$$x_1 + x_2 = 4$$

٧- أوجد أكبر قيمة للدالة :

$$f(\mathbf{x}) = 20x_1 - 10x_2 - 3x_1^2 - 2x_2^2$$

تحت القيود:

$$2x_1 - x_2 \le 6$$
$$-x_1 + x_2 \le 10$$
$$2x_1 + 3x_2 \ge 8$$
$$x_1 \ , \ x_2 \ge 0$$

٨- أوجد أصغر قيمة للدالة:

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2$$

تحت القيود:

$$2x_1 + x_2 \le 2$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

٩- أوجد أكبر قيمة للدالة:

$$f(\mathbf{x}) = 20x_1 - 10x_2 - 3x_1^2 - 2x_2^2$$

تحت القيود:

$$2x_1 - x_2 \le 6$$
$$-x_1 + x_2 \le 10$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

الفصل الثامن

الملاحق

• مقدمة • التفاضل الكلي الرائي • مفكوك متسلسلة تيلور لدالة متعددة المتغيرات • مصفوفات هس والمصفوفات المتماثلة ومؤكدة الايجاب ومؤكدة السلبية ونصف المؤكدة • المجموعة المحدبة • الدالة المحدبة والدالة المقعرة • **النهايات العظمى الكلية والموضعية**

(٨,١) مقدمة

في الفصل التالي نعرض مجموعة من التعاريف أو الخصائص لمفاهيم ظهرت الحاجة إلى استخدامها في فصول الكتاب، وقد لا تكون معروفة لبعض الدارسين. كان الهدف من ايرادها في هذا الفصل هو تيسير الحصول عليها وحتى لا يكون إيرادها داخل الفصول السابقة نشازاً أو حشواً في غير السياق. حاولنا أن يكون إيراد التعاريف والخصائص لهذه المفاهيم موجزاً، ونترك لمن أراد التفاصيل والتعمق الرجوع إلى مراجع أخرى في الرياضيات.

(٨,٢) التفاضل الكلي الرائي

إذا كانت كل المشتقات الجزئية للدالة $f(x_1, x_2,..., x_n)$، خلال رتبة $r \geq 1$، موجودة ومستمرة عند نقطة $\mathbf{x}^*$ ، عندئذ تسمى كثيرة الحدود:

$$d^r f(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \dots \sum_{k=1}^{n} h_i h_j \dots h_k \frac{\partial^r f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_k}$$

التفاضل الكلي الرائي (the rth differential) للدالة f عند $\mathbf{x}^*$.

ملحوظة : يوجد عدد r من علامات التجميع لكل h_i واحدة، وعلى سبيل المثال، إذا كانت $r = 2$ ، $n = 3$ فإن:

$$d^r f(\mathbf{x}^*) = d^2 f(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} h_i h_j \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$= h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}^*) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}^*) + h_3^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(\mathbf{x}^*) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}^*)$$

$$+ 2h_2 h_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(\mathbf{x}^*) + 2h_1 h_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(\mathbf{x}^*)$$

(٨,٣) مفكوك متسلسلة تايلور لدالة متعددة المتغيرات

يعطي مفكوك تايلور لدالة $f(\mathbf{x})$ حول النقطة $\mathbf{x}^*$ بالمعادلة التالية :

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + df(\mathbf{x}^*) + \frac{1}{2!} d^2 f(\mathbf{x}^*) + \frac{1}{3!} d^3 f(\mathbf{x}^*)$$

$$+ \dots + \frac{1}{N!} d^N f(\mathbf{x}^*) + R_N(\mathbf{x}^*, h)$$

حيث يسمى الحد الأخير بالحد الباقي الذي يعطى بالعلاقة:

$$R_N(\mathbf{x}^*, h) = \frac{1}{(N+1)!}\, d^{N+1}\, f(\mathbf{x}^* + \theta h)$$

حيث $h = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ و $0 < \theta < 1$.

(٤ ,٨) مصفوفات هس والمصفوفات المتماثلة والمؤكدة الإيجاب والمؤكدة السلبية ونصف المؤكدة

المصفوفات المتماثلة

لا تتغير المصفوفة المتماثلة (symmetric) عند تدويرها $A = A^T$ وتساوي المصفوفة المتماثلة المتخالفة (skew symmetric) سالب المدور ($A = -A^T$).

مصفوفة هس

مصفوفة هس (Hess) المرتبطة بالدالة $f(x_1, x_2,..., x_n)$ التي لها مشتقات جزئية ثانية هي المصفوفة:

$$H_f = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}\right] \quad (i, j = 1, 2,..., n)$$

ويحقق التعبير $H_f|_{\mathbf{x}^*}$ يحقق قيمة المصفوفة هس عند $\mathbf{x}^*$.

المصفوفات الموجبة المؤكدة والسالبة المؤكدة والنصف مؤكدة:

لأي مصفوفة $A = [a_{ij}]$ من رتبة n ومحدداتها الجزئية

$$A_1 = |a_{11}|, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

تكـون المصفـوفة A مؤكـدة الايجـاب (positive definite) إذا، وإذا كانت فقط، جميع قيم المحددات الجزئية $A_1, A_2, \ldots, A_n$ موجبة. وتكون المصفوفة A مؤكدة السلبية (negative definite) إذا، وإذا كانت فقط، A_j لها الإشارة $(-1)^j$ لجميع قيم $j = 1, 2, \ldots, n$. أما إذا كانت بعض قيم A_j موجبة وبعضها الآخر يساوي أصفاراً أو الواحد، فإن المصفوفة A تكون نصف مؤكدة الإيجاب.

نلاحظ أيضاً أن المصفوفة A تكون مؤكدة الإيجاب إذا كان جميع قيم جذورها المميزة موجبة. أي جميع قيم λ التي تحقق المعادلة المحددية:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$$

تكون موجبة، انظر (Rao, 1984)

(٨,٥) المجموعة المحدبة

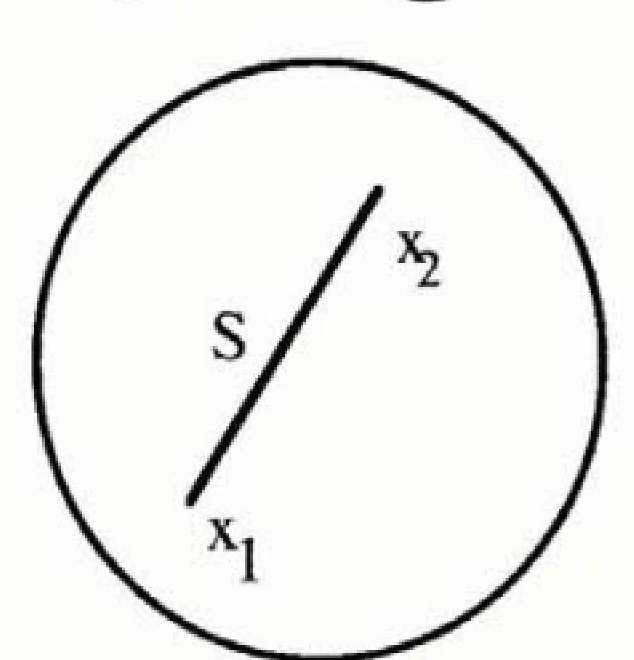
يقال إن المجموعة S في الفراغ E^n محدبة (convex set) إذا كانت النقطة:

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2 \qquad (٨,١)$$

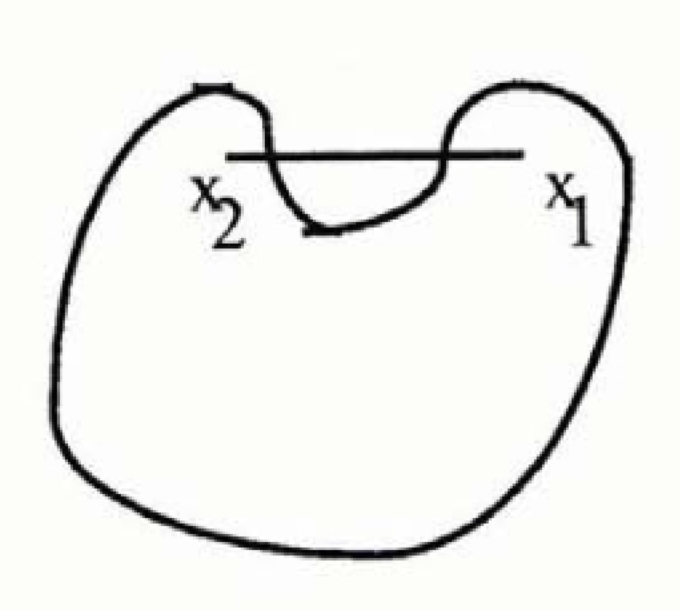
وتقع أيضاً في المجموعة S لجميع قيم $\mathbf{x}_1$ و $\mathbf{x}_2$ التي تنتمي إلى المجموعة S لأي

عدد λ يحقق العلاقة $0 \le \lambda \le 1$.

تُعرف العلاقة (1) بأنها تركيبة محدبة للنقطتين $\mathbf{x}_1$ و $\mathbf{x}_2$ ، وبتعبير آخر، فإن المجموعة S تكون محدبة إذا كان المستقيم الواصل بين أية نقطتين داخل المجموعة S يقع كلياً داخل المجموعة S كما يوضح ذلك الشكل (٨,١).



(أ) مجموعة محدبة



(ب) مجموعة غير محدبة

الشكل رقم (٨,١).

(٨,٦) الدالة المحدبة والدالة المقعرة

يقال إن الدالة $f(\mathbf{x})$ محدبة (convex function) ومعرفة على المجموعة المحدبة S في الفراغ E^n إذا تحققت العلاقة التالية:

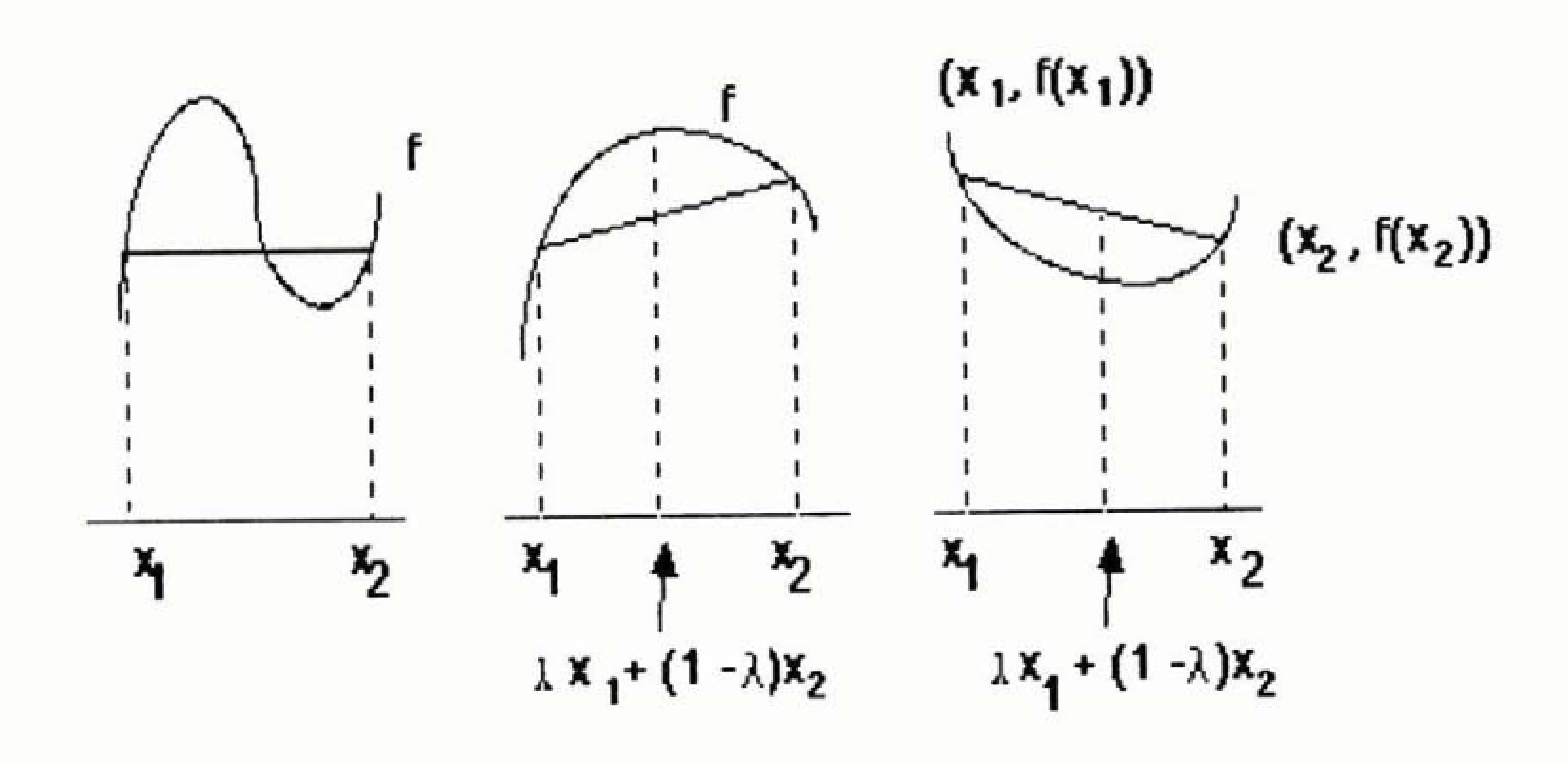
$$f\left[\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2\right] \le \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_2) \quad (٨,٢)$$

لجميع قيم $\mathbf{x}_1$ و $\mathbf{x}_2$ التي تنتمي إلى المجموعة S لجميع قيم λ حيث $0 \le \lambda \le 1$.

ويقال إن الدالة $f(\mathbf{x})$ مقعرة (concave) إذا انعكس اتجاه المتباينة في العلاقة(٨,٢) . لاحظ أن إشارة المساواة تتحقق في العلاقة (٨,٢) عندما تكون $\lambda = 0$ أو $\lambda = 1$.

تكون الدالة $f(\mathbf{x})$ حادة التحدب (strictly convex) إذا تحققت العلاقة (٨,٢) بعد إهمال علامة المساواة لجميع قيم $\mathbf{x}_1$ و $\mathbf{x}_2$ ولنعتبر الخط المستقيم الذي يصل بين النقطة $\left[\mathbf{x}_1 \text{ و } f(\mathbf{x}_1)\right]$ والنقطة $\left[\mathbf{x}_2 \text{ و } f(\mathbf{x}_2)\right]$، عند ذلك فإن

الطرف الأيمن من العلاقة (2) يمثل ارتفاع هذا المستقيم عند أي نقطة $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ ، ويكون التابع محدباً إذا كان الخط المستقيم يقع كلياً؛ إما على مسطح منحنى الدالة $f(x)$ أو فوقه . أما بالنسبة للتابع المقعر فإن هذا المستقيم يقع على منحنى الدالة $f(x)$ أو تحته كما هو مبين في الشكل (٢ , ٨).



(أ) دالة محدبة (ب) دالة مقعرة (جـ) دالة لا محدبة ولا مقعرة

الشكل رقم (٢ , ٨).

يتضح مما سبق أن أية دالة خطية محدبة ومقعرة في الوقت نفسه ويمكن إثبات أنه :

- إذا كانت الدالة $f(x)$ مقعرة، فإن $-f(x)$ تكون دالة محدبة ،نقيض ذلك صحيح.
- إن مجموع دالتين مقعرتين (محدبتين) أو أكثر يكون دالة مقعرة (محدبة).

(٨,٧) النهايات العظمى الكلية والموضعية

يقال إن للدالة $f(\mathbf{x})$ المعرفة على المجموعة S نهاية عظمى كلية (global maximum) عند النقطة $\mathbf{x}^*$ الواقعة في المجموعة S إذا، وإذا فقط، كان $f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x})$ لجميع قيم $\mathbf{x}$ داخل المجموعة S.

كما يقال أن النقطة $\mathbf{x}_0$ حدِّية أو طرفية (نهاية صغرى أو نهاية عظمى) للدالة $f(x)$ إذا كانت:

$$\mathbf{f}\ (\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) \leq (\geq)\ \mathbf{f}\ (\mathbf{x}_0)$$

لكل قيم h بحيث تكون $\|\mathbf{h}_i\|$ مقدرا متناهيا في الصغر لجميع القيم.

ويقال إن للدالة $f(\mathbf{x})$ نهاية عظمى موضعية (local maximum) عند النقطة $\mathbf{x}^*$ إذا، وإذا فقط، كان هناك عدد $0 < \in$ بحيث إن $f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x})$ لجميع قيم $\mathbf{x}$ ضمن S التي تحقق العلاقة $|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}| < \in$. وبتعبير آخر فإن النهاية العظمى الموضعية $\mathbf{x}^*$ تكون أكبر قيمة ضمن مجموعة جزئية ولتكن U التي لا تبعد أية نقطة بداخلها عن $\mathbf{x}^*$ مسافة أكبر من $\in$.

يلاحظ أن النهاية العظمى الكلية لا بد أن تكون أيضاً عظمى موضعية.

يمكن تعريف النهايات الصغرى الكلية والموضعية بنفس الطريقة السابقة بعد تغيير اتجاه المتباينات.

تجدر الإشارة الى أن المسافة بين النقطتين $x_1 = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n})$، $x_2 = (x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n})$ ويرمز لها بالرمز $\|x_1 - x_2\|$ تحسب بالعلاقة:

$$\|x_1 - x_2\| = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_{1i} - x_{2i})^2\right]^{1/2}$$

المــــراجـــع

أولا: المراجع العربية

أبو عمة، عبدالرحمن محمد و العش، محمد أحمد (١٩٩٠م) "البرمجة الخطية". عمادة شوون المكتبات، جامعة الملك سعود، الرياض.

أبو ركبه، حسن (١٩٨٣م) "بحوث العمليات وتطبيقاتها في مجال الإدارة". المملكة العربية السعودية، مطابع سحر - جدة.

العتيبي، سعد بن محمد سعد (١٩٩٣م) "بحوث العمليات وتطبيقاتها في القوات المسلحة". مطابع التريكي، الدمام.

لويز سيفين، لطفي(١٩٧٧م) 'بحوث العمليات - المنهج الكمي لاتخاذ القرار' دار الجامعات المصرية - الإسكندرية - مصر.

لويز سيفين، لطفي(١٩٨٥م) 'البرمجة الرياضية - النماذج الخطية' دار الجامعات المصرية - الإسكندرية - مصر.

لويز سيفين، لطفي(١٩٨٥م) 'البرمجة الرياضية - النماذج اللا خطية' دار الجامعات المصرية - الإسكندرية - مصر.

ثانيا: المراجع الأجنبية

Ackoff, R.L. and Saseni, M.W. (1968). *Fundamentals of Operations Research.* John Wiley Sons, New York.

Avriel. M. (1976). *Non-linear Programming: Analysis and Methods.* Printice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Baba, N. (1981). "Convergence of Random Optimization Method for Constrained Optimization Problems". Journal of Optimization Theory and Applications, Vol 33,pp. 451 - 461.

Bazara, S. and Shetty, C. M. (1993). Non-linear Programming: Theory and Algorithms.John Wiley Sons, New York.

Bazara, S. and Jarnis, J.J. and Sherali, H. D. (1980). Linear *Optimization and Network Flow.*John Wiley Sons, New York. 2nd Ed.

Beale, E.M.L. (1968). *Mathematical Programming.* Pitman Pub. Ltd., London.

Bronson, R. (1982). *Schaum's Outline Series Theory and Problems of Operations Research.* McGraw-Hill, Inc., New York.

Dantzing, P.A. (1963). *Linear Programming: An Extension.* Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.

Fletcher, R. (1987). *Practical Methods of Optimizations.* John Wiley Sons, New York.

Gass, S.L. (1984). *Linear Programming.* 5th ed. McGraw-Hill Book Co. Inc. New York.

Gottfried, B.S. and Weisman, J. (1973). *Introduction to Optimization Theory.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

Hancock, H. (1960). *Theory of Maxima and Minima.* Dover, New York.

Hillier, F.S. and Lieberman, G.J. (1990). *Introduction to Operations Research.* Holden-Day, San Francisco.

Hillier, F.S. and Lieberman, G.J. (1991). Introduction to Mathematical Programing. McGraw-Hill Book Co. Inc. New York.

Horst, R. and Tuy, H.(1990). Global Optimization: Deterministic Approaches. Spring - Verlag, Berlin.

Jacoby, S.L.S., Kowalik and Pizza, J.T. (1972). *Iterative Methods for Non-Linear Optimization Problems.* Prentice-Hall, Englewood

Cliffs, New Jersey.

Luenberger, D.G. (1984). *Introduction to Linear and Non-linear Programming*. Addison-Wesely, Reading, Mass.

McCormik, G.P. (1983). *Non-linear Programming*. John Wiley Sons, New York.

Rao, S.S. (1984). *Optimization: Theory and Applications*. 2nd Ed. Wiley Eastern, Limited.

Saaty,T. (1959). *Mathematical Methods of Operations Research*, McGraw-Hill Book Company, Inc. New York.

Sasieni, M., Yaspan, A. and Friedman, L. (1959). *Operations Research-Methods and Problems*. John Wiley & Sons, Inc. New York.

Taha, H.A. (1982). Operations Research: *An Introduction;* 3rd Ed. Macmillan Pub. Co., New York.

Topkis, D.M. (1982). A cutting-plane algorithm with linear and geometric rates of convergence. *Journal of Optimization Theory and Applications*; Vol. 36, pp. 1 - 22.

Van de panne, C. (1975). *Methods for Linear and Quadratic Programming*. North-Holland, Amesterdam.

Vajda, S. (1975). *Problems in Linear and Non-Linear Programming*. Charles Griffin & Co. Ltd., London.

Walsh, G.R. (1975). *Methods of Optimization*. John Wiley & Sons, Inc. New York.

Winston,W.L.(1991). *Introduction to Mathematical Programing Applications and Algorithms*. P. W. S. Kent Pub. Co Boston.

Wismer, D.A. and Chattery, R. (1978). *Introduction to Non-Linear Optimization*. North-Holland, New York.

Wolfe, P. (1959). *The simplex methods for quadratic programming*. Econometric, Vol. 27, pp. 382 - 398.

Zangwill, W. (1969). *Non-Linear Programming: A Unified Approach*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.



ثبت المصطلحات

أولاً: عربي - إنجليزي

(أ)

أرقام فيبوناشي	Fibonacci numbers
أساس	Basic
أساسي	Principal
أقصى ميل صعود	Steepest ascent
أمثلية	Optimization
أمثلية مقيدة	Constrained optimization
انحدار	Gradient

(ب)

بحث عشوائي	Random search
بحوث عمليات	Operations research

برمجة تربيعية	Quadratic programming
برمجة خطية	Linear programming
برمجة ديناميكية	Dynamic programming
برمجة عددية	Integer programming
برمجة غير خطية	Non-linear programming
برمجة كسرية (نسبية)	Fractional programming
برمجة منفصلة	Separable programming

(ت)

تحليل الشبكات	Network analysis
تحويل	Transformation
تخصيص	Assignment
تربيعي	Quadratic
تصغير	Minimization
تعويض مباشر	Direct substitution
تطبيع القيود	Normalization of constraints
تغيير مسموح به	Admissible variation
تغيير مقيد	Constrained variation
تفاضلي	Differentiable
تفاوت	Tolerance
تقليدي	Classical
تقنيات التصغير	Minimization techniques
تكبير	Maximization

(ث)

ثنائية	Duality

(ج)

جدولة	Scheduling

(ح)

حاد التحدب	Strictly convex
حدى	Extreme
حذف المتغيرات	Elemination of variable
حساب التغيرات	Calculus of variation
حل إضافي	Additional solution
حل تافه أو متحلل	Degnerate solution
حل مبدئي	Starting solution
حل ممكن	Feasible solution

(خ)

خوارزمية	Algorithm

(د)

دالة الجزاء	Penalty function

(ش)

شبه محدده	Semi-definite
شرط أمثل	Optimal condition
شروط استقرار	Stationary condition
شروط داليه	Functional constraint
شروط كون - توكر	Kuhn-Tucker's condition

(ص)

صياغـــة	Formulation
صيغة قياسية	Standard form

(ط)

طريقة الرسم(بيانية)	Graphical method
طريقة السمبلكس	Simplex method
طريقة المقطع الذهبي	Golden section method
طريقة انحدارية	Descending method
طريقة بحث مباشر	Direct search method
طريقة بحث النمط	Pattern search method
طريقة بيل	Beale's method
طريقة تدوير الاتجاه	Rotating direction method
طريقة تقليدية	Classical method
طرق تكرارية	Iterative mehtods
طريقة زوتندجك	Zoutendijk
طرق غير مقيدة	Unconstrained methods
طريقة المستوى القاطع	Cutting plane method
طريقة مركبة	Complex method
طريقة نيوتن	Newton method
طريقة هوك – جيفز	Hook-Jeeves method
طريقة ولف	Wolfe's metho d

(ع)

عدم السالبيه	Non-negativity

عشوائي	Stochastic
عنصر محوري	Pivotal element

(غ)

غير متحلل (منحل)	Non-degnerate
غير مؤكد	Uncertain

(ف)

فرعي	Minor

(ق)

قاعدة كرامر	Cramer's rule
قانوني	Canonical
قيود	Constraints
قيود الإشارة	Sign constraints

(ك)

كلي	Global

(م)

متتابعة غير مقيدة	Sequential unconstrained
متتابعة فيبوناشي	Fibonacci sequence
متراجحة أو متباينة	Inequality
متغير أساسي	Basic variable
متغير اصطناعي	Artificial variable
متغير القرار	Decision variable
متغير داخل	Entering variable
متغير خارج	Leaving variable

متغير غير محوري	Non-pivotal variable
متغير متعدد	Multivariable
متغير متمم	Slack variable
متغير مفرد	Single varia
متماثل	Symmetric
محاكاه	Simulatio
محدب	Convex
محدد	Definite
محدد الايحاب	Positive definite
مركبات أو وحدات	Arguments
مستمر	Continuous
مشحن	Transhipment
مشروع	Project
مصفوفة هس	Hessian matrix
مضاريب لاجرانج	Lagrange multipliers
معادلة	Equation
مفكوك تايلور	Taylor's expansion
مجاورة	Adjacement
مقعر	Concave
منحرف أو متخالف	Skew
منقول أو مدور	Transpose
موضعي	Local

(ن)

نقطة السرج	Saddle point

Corner point	نقطة حدية
Transportation	نقل

(هـ)

Objective	هدف
Geometric	هندسي

(و)

Unimodal	وحيدة المنوال

(لا)

Infinitesimal	لانهائي الصغر

(ي)

Normalize	يطبع

ثانيا: انجليزي - عربي

(A)

Additional solution	حل إضافي
Adjacent	مقاربةأو مجاورة
Admissible variation	تغيير مقبول أو مسموح
Alogrithm	خوارزمية
Arguments	مركبات أو وحدات
Artificial variable	متغير اصطناعي أو شكلي
Assignment	تخصيص

(B)

Basis	أساس
Basic variable	متغير أساس
Beale's method	طريقة بيل

(C)

Canonical	قانوني
Calculus of variation	حساب التغيرات
Classical	تقليدي
Classical method	طريقة تقليدية
Complex method	طريقة مركبة
Concave	مقعر
Constrained optimization	أمثلية مقيدة

Constrained variation	تغير مقيد
Constraints	قيود
Continuous	مستمر
Convex	محدب
Corner point	نقطة حدية(ركن)
Cramer's rule	قاعدة كرامر
Cutting plane method	طريقة المستوى القاطع

(D)

Decision variabale	متغير القرار
Definite	محدد
Degnerate solution	حل تافه أو متحلل
non-degnerate	غير متحلل
Descending method	طريقة انحدارية
Differentiable	تفاضلي
Direct search meth	طريقة بحث مباشر
Direct substitution	تعويض مباشر
Duality	ثنائية
Dynamic programming	برمجة ديناميكية

(E)

Elemination of variables	حذف المتغيرات
Entering variable	متغير داخل
Equation	معادلة

حدي (طرفي)	Extreme

(F)

حل ممكن	Feasible solution
أرقام فيبوناشي	Fibonacci numbers
متتابعة فيبوناشي	Fibonacci sequence
صياغة	Formulation
برمجة كسرية (نسبية)	Fractional programming
شروط داليه	Functional constraints

(G)

هندسي	Geometric
كلي	Global
طريقة المقطع الذهبي	Golden section method
انحـدار	Gradient
طريقة الرسم	Graphical method

(H)

مصفوفة هس	Hessian matrix
طريقة هوك - جيفر	Hook-Jeeves method

(I)

متراجحة أو متباينة	Inequality
لانهائي الصغر	Infinitesimal
برمجة عددية	Integer programming
طرق تكرارية	Iterative methods

(K)

Kuhn-Tucker's condition	شروط كون – توكر

(L)

Lagrange multipliers	مضاريب لاجرانج
Leaving variable	متغير خارج
Linear programming	برمجة خطية
Local	موضعي

(M)

Maximization	تكبير
Minimization	تصغير
Minimization technique	طرق أو تقنيات التصغير
Minor	فرعي
Multivariable	متغير متعدد

(N)

Network analysis	تحليل الشبكات
Newton method	طريقة نيوتن
Non-linear programming	برمجة غير خطية
Non-negativity	عدم السالبية
Non-pivotal variable	متغير غير محوري
Normalize	يطبع
Normalization of constraints	تطبيع القيود

(O)

Objective	هدف
Operations research	بحوث عمليات
Optimal condition	شرط أمثل
Optimization	أمثلية

(P)

Pattern search method	طريقة بحث النمط
Penalty function	دالة الجزاء
Pivotal element	عنصر محوري
Positive definite	محدد الايجاب
Principal	أساسي
Project	مشروع

(Q)

Quadratic	تربيعي
Quadratic programming	البرمجة التربيعية

(R)

Random search	بحث عشوائي
Rotating direction method	طريقة تدوير الاتجاه

(S)

Saddle point	نقطة السرج
Scheduling	جدولة
Semi-definite	شبه محددة

Separable programming	برمجة منفصلة
Sequantial unconstrained	تتابع غير مقيد
Simplex method	طريقة السمبلكس
Simulation	محاكاة
Sign constraints	قيود الإشارة
Single variable	متغير مفرد
Skew	منحرف أو متخالف
Slack variable	متغير متمم
Standard form	صيغة قياسية
Starting solution	حل مبدئي
Stationary condition	شرط استقرار
Steepest ascent	أقصى ميل صعود
Stochastic	عشوائي
Strictly convex	حاد التحدب
Symmetric	متماثل

(T)

Tylor's expansion	مفكوك تايلور
Tolerance	تفاوت
Transformation	تحويل
Transhipment	مشحن
Transportation	نقل
Transpose	منقول

(U)

غير مؤكد	Uncertain
طرق غير مقيدة	Unconstrained methods
وحيدة المنوال	Unimodal

(W)

طريقة ولف	Wolfe's method

(Z)

طريقة زوتندجك	Zoutendijk method

كشاف الموضوعات

(أ)
أرقام فيبوناشي ١١ ، ٦٩ ، ٩٧
أساس ٣١، ٤٣، ١٠٠
أساسي ٣١، ٤٣، ١٠٠
أقصى ميل صعود ١٢١ ، ١٢٢
أمثلية ٩ ، ٢٥
أمثلية مقيدة ٩
انحدار ١١

(ب)
بحث عشوائي ٩٨
بحوث عمليات ١ ، ٢ ، ٣، ٥
برمجة تربيعية ١٤ ، ٢٦٥
برمجة خطية ٩ ، ١٤ ، ٢٥ ، ٢٢٧
برمجة ديناميكية ٢

برمجة عددية ٢
برمجة غير خطية ١٠، ٢٠، ٦٥
برمجة كسرية (نسبية) ٢٢
برمجة منفصلة ١٣
برمجة تقليدية ١٠، ١٢
برمجة محدبة ٢٢٥

(ت)
تحليل الشبكات ٢
تحويل ٨٦، ٢٢٥، ٢٣٧
تخصيص ٢٦
تربيعي ١٤
تصغير ٩، ٦١
تعويض مباشر ١٣٤
تطبيع القيود ٢١٢
تغيير مسموح به ١٤٥
تغيير مقيد ١٣٤
تفاضلي ٧٧
تفاوت ١٢٢
تقليدي ١١، ١٨٧
تقنيات التصغير ٢١٢، ١٤٥
تكبير ١١
تكرار ٧٨

(ث)

ثنائية ٣٥

(ج)

جدولة ٤٢، ٤٦

(ح)

حاد التحدب ٣٠٣، ٣٠٤

حدى ٣٥

حذف المتغيرات ٣٩

حل أساسي ٤٠، ٤٣

حل تافه أو متحلل ٣٨

حل مبدئي ٣٨

حل ممكن ٣٢، ٤٢

(خ)

خوارزمية ١٠، ٤٤، ٢٦٦

(د)

دالة الهدف ١٢، ٣٠، ١٤٨، ٢٠٥

دالة الجزاء ١٨٦، ٢٤٤

دالة أحلدية المنوال ٦٦

(ش)

شبه محددة ٩٣
شرط أمثل ٥٣
شروط استقرار ٢٠٥
شروط الإشارة ٣١
شروط دالية ٣١، ١٥٧
شروط القابلية ٣١، ٤٧، ٥٣
شروط كون - توكر ١٨٧

(ص)

صياغــة ١، ١٤، ٢٠
صيغة قياسية ٢٨، ٤١

(ط)

طريقة الرسم(بيانية) ٣٠، ٣١
طريقة السمبلكس ١٠، ٢٦، ٣٠، ٩٨
طريقة المقطع الذهبي ٢٢٥
طريقة انحدارية ٩٧، ١٢٠
طريقة بحث مباشر ١٣، ٩٧
طريقة بحث النمط ٩٨
طريقة بيل ٢٨٤
طريقة تدوير الاتجاه ٨٥
طريقة تقليدية ٨٥، ٨٦
طريقة جاوس - جوردون ٤٩

طرق تكرارية ٩٧
طريقة التعويض المباشر ١٣٤ ، ١٦٤
طريقة زوتندجك ٧
طرق غير مقيدة ٨٥
طريقة المستوى القاطع ١٨٦
طريقة مركبة ١٨٦
طريقة نيوتن - رافسون ١١
طريقة هوك - جيفز ٩٨
طريقة كون- توكر ١٨٦ ، ١٩٣
طريقة ولف ٢٩٧

(ع)
عدم السالبية ٩
عمليات تكرارية ٢٤٩
عنصر محوري ٤٨

(غ)
غير متحلل (منحل) ٣٨
غير مؤكد ٦٨

(ف)
فترة الشك ٦٨ ، ٧٦
فرعي ٩١

(ق)

قاعدة كرامر ١٥٠
قانوني ١٩٦
قيود ١٦٥ ، ١٩٤ ، ٢١٤
قيود دالية ٣١

(ك)

كلي ١٢١ ، ١٩٩

(م)

متتابعة غير مقيدة ٦٨
متتابعة فيبوناشي ١١ ، ٦٨
متراجحة أو متباينة ١٨٥
متغير أساسي ٤٣ ، ٣١٣
متغير اصطناعي ٤٤
متغير القرار ٩ ، ١٥
متيغر داخل ٤٤
متغير خارج ٤٤
متغير غير محوري ٤٨ ، ٤٩
متغير متعدد ١٠
متغير متمم ٢٩
متغير مفرد ١٠
متماثل ٣٠١

محدب ٢٢ ، ٣٣
محدد ٨٩ ، ٣٠٣
محدد الايجاب ٨٩ ، ٣٠١ ، ٣٠٢
مركبات أو وحدات ٥٩ ، ١٠٠
مستمر ١٠ ، ١٢
مشحن ٢٦
مصفوفة هس ٩٠ ، ٨٨ ، ٣٠١
مضاريب لاجرانج ١٢
معادلة ٩ ، ٢٩ ، ٤٥ ، ٣٠١
محورية ٤٨ ، ٤٩
مفكوك تايلور ١١ ، ٢٩٩ ، ٣٠٠
مجاورة ٣٠٩
مقعر ٣٠٣ ، ٣٠٤
منحرف أو متخالف ٣٠١
منقول أو مدور ٣٧
موضعي ٣٠٥

(ن)
نقطة السرج ٩٣
نقطة حدية ٣٨ ، ١٨٨
نقل ٢٦ ، ٣٧

(هـ)
هدف ٩ ، ١٢ ، ٣٠

(هـ)

هدف ٩ ، ١٢ ، ٣٠

هندسي ٢٢٨

(و)

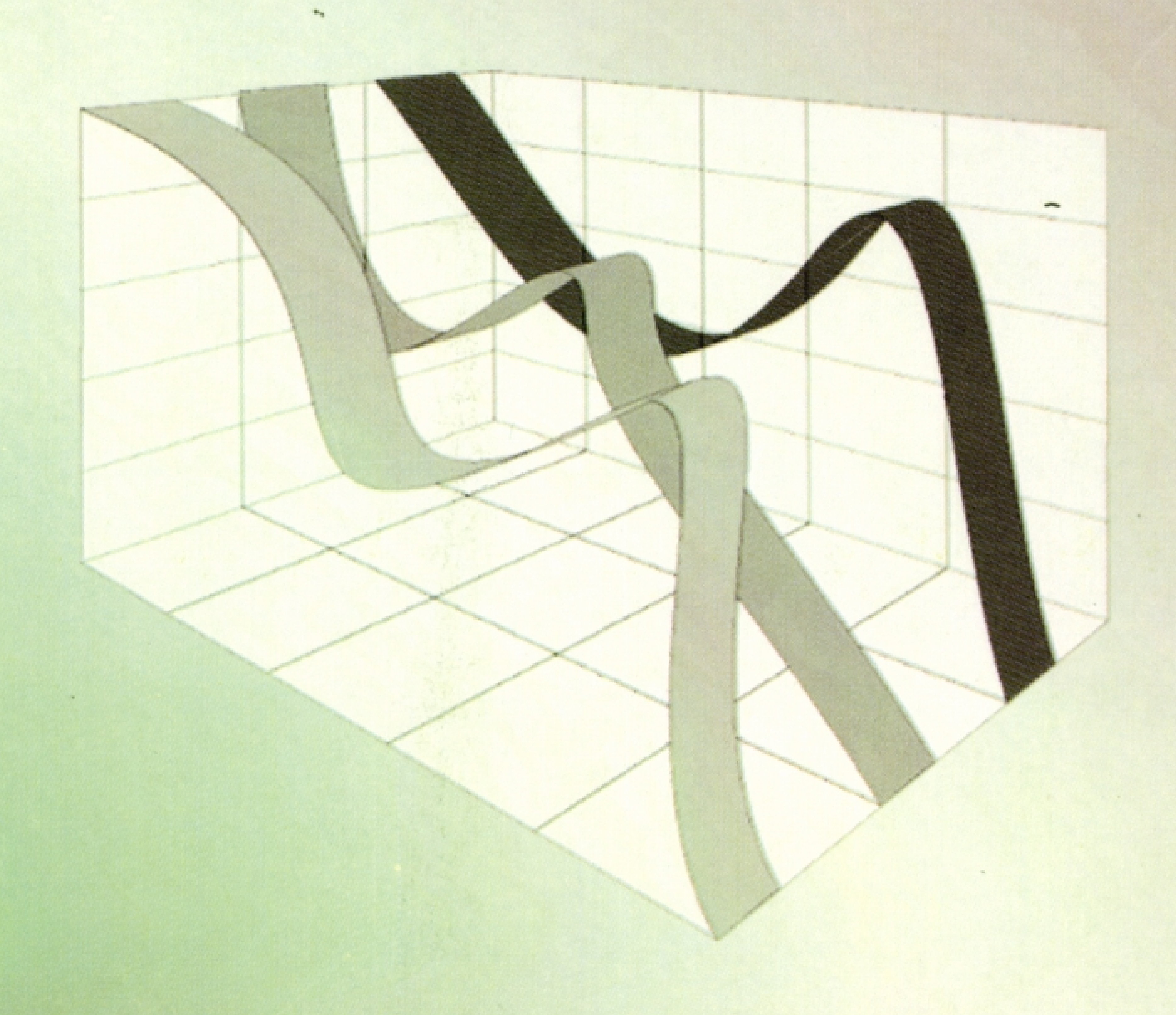
وحيدة المنوال ١٣ ، ٦٦

(لا)

لانهائي الصغر ١٤٨

(ي)

يطبع ٢١٢



ردمك : ٤-٩١٥-٠٥-٩٩٦٠
ISBN:9960-05-915-4